

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2019
Klausur | 21.09.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 27.09.2019 von 10:00–11:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

| | | | | | | |
|-------------|----|----|---|----|---|----------|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
| Punkte | 15 | 11 | 7 | 10 | 7 | 50 |
| Ihre Punkte | | | | | | |

Klausur + Bonus = Gesamt
 + =

Note:

Aufgabe 1.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = Ax(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und $x(0) = (1, 2)^T$.

- a) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von A .
- b) Berechnen Sie die Matrixexponentialfunktion $t \mapsto \exp(tA) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und vereinfachen Sie soweit wie möglich.
- c) Geben Sie die Fundamentalmatrix $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und die Übergangsmatrix $\Lambda(t, \tau) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an.
- d) Geben Sie die allgemeine Lösung des AWP an.
- e) Geben Sie die allgemeine Lösung von

$$x'(t) = Ax(t) + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

an.

3+3+2+2+5 = 15 Punkte

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Gegeben sei das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= -x_1(t) + f_1(x_2(t)), \\x_2'(t) &= -x_2(t) + f_2(x_1(t)).\end{aligned}$$

- a) Falls
- $|f_i(x)| \leq \frac{|x|}{2}$
- ,
- $i = 1, 2$
- gilt, zeigen Sie, dass

$$V(x_1, x_2) := \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

eine Lyapunov Funktion ist.

- b) Sei
- $c_1 = \frac{1}{5}$
- und
- $c_2 = \frac{1}{10}$
- und

$$f_i(x) := c_i \sin(x).$$

Zeigen Sie, dass die Bedingungen von a) erfüllt sind.

- c) Finden Sie die stationären Punkte von

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= -x_1(t) + c_1 \sin(x_2(t)), \\x_2'(t) &= -x_2(t) + c_2 \sin(x_1(t)).\end{aligned}$$

- d) Ist der Punkt
- $(0, 0)$
- asymptotisch stabil?

4+2+3+2= 11 Punkte

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) = -x(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) = -x(t) + te^{-t} + 1.$$

- c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblem

$$x'(t) = \sqrt{1 - x^2(t)}, \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Es gilt, dass $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in (-1, 1)$.

1+3+3 = 7 Punkte

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Betrachten Sie die parameterabhängige Gleichung

$$x' = x^2 + s \sin(t), \quad x(0) = 1,$$

mit der Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (t, x, s) \mapsto f(t, x, s) = x^2 + s \sin(t).$$

- a) Geben Sie die Bedingungen an, welche mit einem Satz aus der Vorlesung garantieren, dass die Abbildung $(t, s) \mapsto x(t, s)$ bei $t = 0$ differenzierbar ist.
- b) Berechnen Sie $x(t, 0)$.
- c) Geben Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\partial_s x(t, s)$ an. Benutzen Sie diese, um $y(t) = \partial_s x(t, s)|_{s=0}$ zu berechnen.

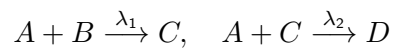
2+3+5 = 10 Punkte

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Betrachten Sie folgende chemische Reaktion



mit den Anfangsbedingungen für die Konzentration der Stoffe

$$n_A(0) = n_A^0, \quad n_B(0) = n_B^0, \quad n_C(0) = n_D(0) = 0$$

- a) Geben Sie die stöchiometrischen Netto-Koeffizienten für die Reaktionen und Stoffe an und geben Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Evolution der Konzentrationen an. Was ist die Gesamtreaktion?
- b) Welche Erhaltungsgrößen gibt es?

4+3 = 7 Punkte

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2019
Klausur am 21.09.2019 | Beanstandungen der Klausurkorrektur

| Name, Vorname | Matrikelnummer |
|---------------|----------------|
| | |

Aufgabe | **Erklärung der Beanstandungen**

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2019
Klausur am 21.09.2019 | Notenskala und Statistik

| Note | Punkte* | Statistik |
|------|-------------|-----------|
| 1.0 | 44.0 – 50.0 | 0 |
| 1.3 | 42.0 – 44.0 | 0 |
| 1.7 | 40.0 – 42.0 | 0 |
| 2.0 | 38.0 – 40.0 | 0 |
| 2.3 | 36.0 – 38.0 | 1 |
| 2.7 | 34.0 – 36.0 | 2 |
| 3.0 | 32.0 – 34.0 | 0 |
| 3.3 | 30.0 – 32.0 | 0 |
| 3.7 | 27.0 – 30.0 | 0 |
| 4.0 | 23.0 – 27.0 | 0 |
| 5.0 | 0.0 – 23.0 | 2 |

Notenskala

Punkte*: Punktespannen sind nach unten inklusiv und nach oben exklusiv

