Vertr.-Prof. Dr. Christian Rieger
Muhammad Hassan

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2019
Klausur | 06.08.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 14.08.2019 von 10:00–11:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte	7	9	15	10	9	50
Ihre Punkte						

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

a) Formulieren Sie das Problem als Fixpunktgleichung der Form $x = Tx$.

b) Betrachten Sie konkret

$$x'(t) = 2tx(t), \quad x(0) = 1.$$

Führen Sie die ersten drei Schritte der Fixpunktiteration $x_{k+1} = Tx_k,\ k = 0, 1, 2$ durch.

3+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \exp(x(t)) \sin(t), \quad x(0) = x_0.$$

Bestimmen Sie die maximale Lösung und das maximale Existenzintervall für $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} - \frac{x^2(t)}{t^2}, \quad x(1) = -1.$$

5+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

a) Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0, \quad x(0) = \alpha,\ x'(0) = \beta,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Formulieren Sie das Problem als lineares System erster Ordnung der Form

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Jordan-Normalform der Matrix A.

c) Berechnen Sie zunächst die Matrixexponentialfunktion $t \mapsto \exp(tA) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

d) Geben Sie nun die Fundamentalmatrix $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die Übergangsmatrix $\Lambda(t, \tau) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an.

e) Betrachten Sie nun das inhomogene Problem

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = t, \quad x(0) = \alpha,\ x'(0) = \beta$$

und geben Sie die Lösung dieser Gleichung an.

2+3+3+2+5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem (Lorentz) mit $\sigma, \rho, \beta > 0$

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ x_2'(t) &= x_1(t)(\rho - x_3(t)) - x_2(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte.

b) Zeigen Sie, daß für $\rho < 1$ die Funktion $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma x_3^2$ eine Lyapunov-Funktion für das System ist.

c) Ist der für $\rho = \frac{1}{2}$ der Punkt $(0, 0, 0)^\top$ asymptotisch stabil?

2+5+3 Punkte

Aufgabe 5.
Betrachten Sie die parameterabhängige Gleichung

$$x' = x^2 + se^t, \quad x(0) = 1,$$

mit der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (t, x, s) \mapsto f(t, x, s) = x^2 + se^t.$$

a) Geben Sie, die Bedingungen an, welche mit einem Satz aus der Vorlesung garantieren, daß die Abbildung $(t, s) \mapsto x(t, s)$ bei $t = 0$ differenzierbar ist.

b) Berechnen Sie $x(t, 0)$.

c) Geben Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\partial_s x(t, s)$ an. Benutzen Sie diese, um $y(t) = \partial_s x(t, s)|_{s=0}$ zu berechnen.

2+2+5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: