Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2018
Klausur | 22.09.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 05.10.2018 von 10:15–11:15 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte	10	10	7	10	10	47
Ihre Punkte						

Klausur ☐ + Bonus ☐ = Gesamt ☐

Note: ☐

Aufgabe 1.

a) Was ist die allgemeine Lösung von $x' = x^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $x(0) = 1$? Geben Sie auch das Existenzintervall an.

b) Wie lautet die Lösung des 2-dimensionalen AWP

$$x' = Ax \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

und $x(0) = (1,1)^T$?

c) Wie lautet die Lösung im Fall von (b) für $x(0) = (0,0)$? Ist diese (asymptotisch) stabil?

5+3+2 = 10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Gegeben sei das AWP

$$y' = 2xy \quad \text{in } [a, b] \times \mathbb{R}, \quad y(a) = c. \tag{1}$$

a) Begründen Sie, dass die Voraussetzungen der Picard-Lindelöf Iteration erfüllt sind und dass eine eindeutige Lösung des Problems (1) existiert.

b) Berechnen Sie explizit die ersten drei Picard-Lindelöf Iterationen y_0, y_1, y_2 des Problems (1).

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die n-te Picard-Lindelöf Iteration y_n des Problems (1) gilt:

$$y_n(x) = c \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}, \qquad x \in [a, b].$$

Bestimmen Sie den punktweisen Limes der Picard-Lindelöf Iterationsfolge (y_n). Löst dieser Limes das Problem (1)?

3+2,5+4,5 = 10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Im Allgemeinen kann man keine geschlossene Lösungsformel für homogene lineare Differentialgleichungssysteme $x'(t) = A(t)x(t)$ angeben, wenn $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Jedoch lässt sich, wenn eine nichttriviale Lösung bekannt ist, das gegebene System von n Gleichungen auf ein System von $n-1$ Gleichungen zurückführen (Reduktionsverfahren von d'Alembert). Für $n = 2$ funktioniert das wie folgt:
Sei $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die gegebene Lösung. OBdA sei $\xi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ (sonst verkleinere I oder vertausche die Komponenten). Man macht nun den Ansatz:

$$\mathbb{R}^2 \ni y(t) = a(t)\xi(t) + z(t) \text{ mit } z(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta(t) \end{bmatrix}, \quad \text{wobei } a, \zeta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}).$$

a) Zeigen Sie, dass y genau dann eine Lösung von $x'(t) = A(t)x(t)$ ist, wenn

$$\zeta'(t) = (A_{22}(t) - A_{12}(t)\tfrac{\xi_2(t)}{\xi_1(t)}) \cdot \zeta(t) \quad \text{und} \quad a'(t) = A_{12}(t)\tfrac{\zeta(t)}{\xi_1(t)}.$$

b) Sei $I = (0, \infty)$. Wenden Sie das Verfahren auf

$$A(t) = \frac{1}{t^2}\begin{bmatrix} t & -t^2 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}$$

und die gegebene Lösung $\xi(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ -t \end{bmatrix}$ an.

3+4 = 7 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$x' = f_\gamma(x,\alpha)$$

mit

$$f_\gamma(x,\alpha) = x^4 - \alpha x^3 - (\alpha-\gamma)x^2 + \alpha(\alpha-\gamma)x$$

für $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen der Differentialgleichung für allgemeine $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

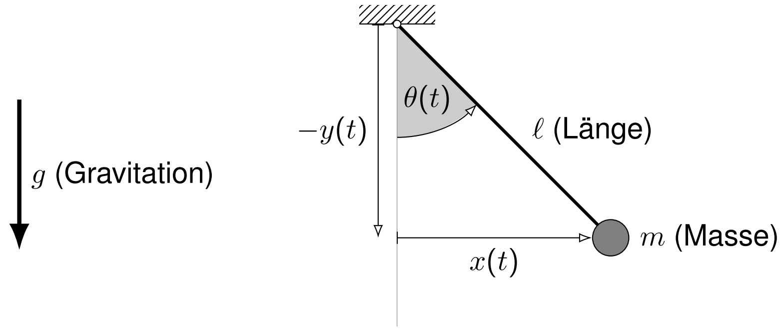
b) Sei nun $\gamma = 1$. Finden Sie alle Bifurkationenen entlang der Ruhelage $x^\star = 0$ bei variablen Parameter α.

c) Sei nun $\gamma \in \mathbb{R}$ wieder allgemein. Betrachten Sie die Ruhelage $x^\star = \alpha$, welche mit dem Parameter α variiert. Wie muss γ gewählt werden, damit entlang $x^\star = \alpha$ außer bei $\alpha = 0$ noch eine weitere Bifurkation auftritt? Bei welchem α?

2+4+4 = 10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.
Wir betrachten das mathematische Pendel.



a) Die zugehörige Lagrangefunktion ist gegeben durch:

$$L\big(\theta(t), \theta'(t)\big) = \frac{1}{2}m(\ell\theta'(t))^2 + mg\ell\cos\theta(t). \tag{2}$$

Interpretieren Sie die Terme anhand der Skizze und identifizieren Sie die kinetische und potentielle Energie.

b) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen zum Minimierungsproblem:

$$S(\theta) = \int_0^T L\big(\theta(s), \theta'(s)\big)\,\mathrm{d}s \longrightarrow \text{min!} \tag{3}$$

mit der oben gegebenen Lagrangefunktion L.

c) Betrachten Sie den Ansatz $\theta(t) = \varepsilon u(t)$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$. Welche Differentialgleichung entsteht aus der Gleichung von b), wenn nur Beiträge linear in ε berücksichtigt werden? (Hinweis: Taylorentwicklung) Geben Sie die Lösung dieser linearsisierten Differentialgleichung an.

d) Wie lautet die Periodendauer des linearisierten Systems?

3+3+3+1 = 10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: