Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2018
Klausur | 09.08.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 17.08.2018 von 10:30–11:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte	8	6	12	10	14	50
Ihre Punkte						

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

a) Lösen Sie das AWP 2. Ordnung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto y(t)$:

$$y'' + y' - 2y = -4t, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 1$$

b) Betrachten Sie nun

$$y'' + y' - 2y = 3\exp(-2t), \qquad y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = \beta$$

Welche Bedingungen müssen die Anfangswerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit für die Lösung $y(t \to \infty) = 0$ gilt?

c) Welches Existenz-Intervall erwarten Sie (mindestens) für die Lösung des AWP

$$y'' + y' - \frac{2}{t}y = 0, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 1?$$

Hinweis: Es ist keine Rechnung nötig.

3+4+1 Punkte

Aufgabe 2.

a) Zeichnen Sie das Phasenportrait von

$$x' = x(x-1)^2(x+1).$$

Für welche Anfangswerte $\xi \in \mathbb{R}$ ergeben sich welche ω-Grenzpunkte?

b) Geben Sie die allgemeine Lösung $\lambda(t, \xi, \tau)$ der ODE $x' = x^2$ an. Wie lauten die jeweiligen maximalen Existenzintervalle $I_{max}(\xi, \tau)$?

3+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

a) Betrachten wir

$$y''(t) + h(y(t)) = 0,$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine L-stetige Funktion sei mit $h(0) = 0$ und $yh(y) > 0$ für alle $0 \neq y \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie die Gleichung mit $(x_1, x_2) = (y, y')$ als System erster Ordnung und zeigen Sie, dass

$$V(x_1, x_2) = 2 \int_0^{x_1} h(\xi) d\xi + x_2^2$$

eine Lyapunov-Funktion ist.

b) Betrachten wir

$$y''(t) + cy'(t) + \sin(y(t)) = 0$$

mit $c \geq 0$ und $(x_1, x_2) = (y, y')$. Zeigen Sie, dass

$$V(x_1, x_2) = 2(1 - \cos(x_1)) + x_2^2$$

auf $U = (-2\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für das (gedämpfte) mathematische Pendel ist.

c) Sei $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben. Betrachten wir die (spezielle) Liénard-Gleichung

$$x' = y - g(x), \quad y' = -x.$$

(i) Diskutieren Sie mithilfe des Linearisierungskriteriums die Stabilitätseigenschaften des Gleichgewichts der Liénard-Gleichung in Abhängigkeit von g.

(ii) Sei nun $g(0) = 0$. Unter welcher Bedingung an g ist $V(x, y) = x^2 + y^2$ eine Lyapunov-Funktion für die Liénard-Gleichung?

3+3+6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Über 200 000 Jahre lang besiedelten die Neandertaler Europa, bis sie schließlich durch Homo sapiens ausgerottet wurden. Sei $x(t)$ die Neandertalerpopulation und $y(t)$ die von Homo sapiens, $N(t) = x(t) + y(t)$ sei die Gesamtpopulation.

a) Bei gleichen Überlebensfähigkeiten und gleichen Nahrungsressourcen für beide Arten folgen x und y den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= F(x,y)\,x - \beta\,x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= F(x,y)\,y - \beta\,y. \end{aligned} \tag{1}$$

Wie sind die Parameter $F(x,y)$ und β zu interpretieren? Bestimmen Sie $F(x,y)$ unter der Annahme, dass die Gesamtpopulation N der logistischen Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \alpha\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta\,N.$$

folgt. Geben Sie die möglichen Gleichgewichtszustände des Systems (1) an.

b) Nehmen Sie nun an, dass Homo sapiens etwas bessere Überlebensfähigkeiten besitzt als der Neandertaler, sich aber nach wie vor beide Arten die gleichen Nahrungsressourcen teilen (d.h. β wird in der zweiten Gleichung des Systems (1) ersetzt durch $(1-\epsilon)\beta, \epsilon > 0$). Benutzen Sie die Skalierung

$$\tilde{x} = \frac{x}{K}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{K}, \quad \tilde{t} = \alpha\,t$$

um das folgende System herzuleiten:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\tilde{t}} &= (1 - \tilde{x} - \tilde{y})\,\tilde{x} - b\,\tilde{x} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{t}} &= (1 - \tilde{x} - \tilde{y})\,\tilde{y} - (1-\epsilon)\,b\,\tilde{y} \end{aligned} \tag{2}$$

mit dem Parameter $b = \beta/\alpha$.

c) Geben Sie die möglichen Gleichgewichtspunkte des neuen Systems (2) an. Diskutieren Sie deren Stabilität. Sterben die Neandertaler zwangsläufig aus?

Hinweis: in einem solchen biologischen System muss gelten $0 < b < 1$.

d) Im Folgenden verzichten wir der Einfachheit halber auf die ˜. Benutzen Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{x}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

um eine Gleichung für $a(t) = x(t)/y(t)$ zu finden und zeigen Sie dass

$$a(t) = a(0)\,\mathrm{e}^{-\epsilon\,b\,t}.$$

Nach Auftauchen des Homo sapiens dauerte es etwa 8000 Jahre, bis die Neandertaler verschwanden. Um welchen Wert ϵ unterschied sich die Sterblichkeit der Neandertaler von der von Homo sapiens? Nehmen Sie dazu eine durchschnittliche Lebenserwartung von 40 Jahren an ($b = 1/40$) sowie $a(8000)/a(0) = 1/e$.

3+2+3+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Betrachten Sie das Reaktionssystem

$$\begin{aligned} A + B &\xrightarrow{K_1} 2C \\ A &\xrightarrow{K_2} 3B \\ C &\xrightarrow{K_3} 2B. \end{aligned}$$

a) Wie lautet das ODE-System für die Evolution der Teilchendichten $n_a(t) =: x(t), n_B(t) =: y(t), n_C(t) =: z(t)$? Was ist die Gesamtreaktion?

b) Zeigen Sie, dass $3n_A + n_B + 2n_C$ erhalten ist. Welche Einschränkungen ergeben sich daraus für die Massen von A, B und C?

c) Zeigen Sie, dass die einzigen physikalisch relevanten Gleichgewichtslösungen die Form

$$n_A(t) = n_C(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad n_B(t) = Y \qquad \text{mit} \qquad Y \in \mathbb{R}^+$$

haben. Interpretieren Sie diese Lösung anhand des Reaktionssystems.

d) Sei $3n_A + n_B + 2n_C|_{t=t_0} = N$. Eliminieren Sie aus den Gleichungen für n_A und n_C die Dichte n_B mithilfe der Erhaltungsgröße und zeigen Sie asymptotische Stabilität des Gleichgewichts. Welcher Wert für $n_B(t)$ ergibt sich für $t \to \infty$?

4+3+3+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: