

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2017
Klausur | 26.09.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 05.10.2017 von 14:15–15:15 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	7,5	9	10	11	12,5	50
Ihre Punkte						

Klausur Bonus Gesamt
 + =

Note:

Aufgabe 1.

Geben Sie jeweils die vollständige explizite Lösung der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen an:

a)

$$x'(t) = \frac{1 + x^2(t)}{x(t)t}, \quad x(\tau) = \xi, \quad (\tau, \xi) \in (0, \infty)^2,$$

b)

$$x'(t) = 2x(t) + 2t\sqrt{x(t)}, \quad x(\tau) = \xi, \quad (\tau, \xi) \in (0, \infty)^2.$$

Geben Sie auch das Existenzintervall in Abhängigkeit von (τ, ξ) an.

Hinweis: Wählen Sie für (b) den Ansatz $x(t) = u(t)^2, u(t) > 0$.

3,5+4

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Betrachten Sie die DGL $x' = (x - 1)(\alpha - 3x + x^3) \equiv f(x, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Welche Ruhelagen/Gleichgewichte existieren für $\alpha = 0$? Welche Mengen sind für generelles α Ruhelagen?
- b) Zeigen Sie, dass es bei $(x_0, \alpha_0) = (-1, -2)$ eine Bifurkation gibt und bestimmen Sie, ob diese sub-, super- oder transkritisch ist. Zeichnen Sie dazu die Ruhelagen in ein $x - \alpha$ -Diagramm ein.
- c) Führen Sie eine Transformation der Form $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{\alpha} = \alpha - \alpha_0$ um den Punkt $(x_0, \alpha_0) = (-1, -2)$ durch und verifizieren Sie, dass die Bifurkation von $f(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ nun bei $(0, 0)$ ist.
Sind die Voraussetzungen einer Sattel-Knoten-Verzweigung erfüllt?
- d) Entlang $x = 1$ gibt es eine weitere Bifurkation. Identifizieren Sie diese und geben Sie an, ob diese sub-, super- oder transkritisch ist

2+3+2,5+1,5

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Sei $p \in \mathbb{N}$. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x' &= -x^p + y \\y' &= -x - y^p.\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die stationären Punkte in Abhängigkeit von p .
- b) Untersuchen Sie mit dem Linearisierungskriterium die linearisierte Stabilität des Fixpunktes $(0, 0)$. Welche Aussage lässt sich in Abhängigkeit von p machen?
- c) Machen Sie für eine Lyapunov Funktion den Ansatz

$$V(x, y) = a(x^2 + y^2)$$

und bestimmen Sie Einschränkungen an a und p .

- d) Für welche p ergibt sich welche Stabilität nach Lyapunov für den oben betrachteten Fixpunkt $(0, 0)$?

2+4+2+2

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Betrachten Sie das Lotka-Volterra System

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - by - cz) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-d + ex) \\ \frac{dz}{dt} &= z(-f + gx)\end{aligned}\tag{★}$$

mit den Parametern $a, b, c, d, e, f, g > 0$.

- Interpretieren Sie die Parameter und erläutern Sie die Situation der Populationen. Welche Evolution ergibt sich für $b = e = 0$ bzw. $c = g = 0$?
- Wählen Sie die Skalierung $\hat{x} = \frac{x}{d/e}$, $\hat{y} = \frac{y}{d/e}$ und $\hat{z} = \frac{z}{a/c}$ und leiten Sie das dimensionslose System

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= \hat{x}(1 - \hat{y} - \hat{z}) \\ \gamma_1 \frac{d\hat{y}}{dt} &= \hat{y}(-1 + \hat{x}) \\ \gamma_2 \frac{d\hat{z}}{dt} &= \hat{z}(-1 + \alpha\hat{x})\end{aligned}\tag{★★}$$

her. Wie sind die Definitionen der Parameter γ_1, γ_2 und α ?

- Zeigen Sie, dass das dimensionslose System (★★) genau die drei Ruhelagen $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 1, 0)$ und $P_3 = (\frac{1}{\alpha}, 0, 1)$ hat.
- Stellen Sie das linearisierte System zur Ruhelage P_2 auf. Bestimmen Sie die vollständige allgemeine Lösung mit Hilfe des Fundamentalsystems.
- Geben Sie anhand der Lösung aus (d) eine Argumentation für folgende Aussage: In der Umgebung von P_2 entsteht das klassische Lotka-Volterra Verhalten mit zwei Populationen falls $\alpha < 1$.
- Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften von P_3 . Geben Sie eine Vermutung für das Verhalten in der Umgebung von P_3 , falls $\alpha > 1$.

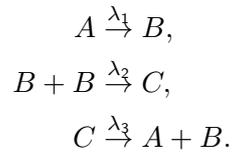
2+3+1+3+1+1

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Gegeben Sei das chemische Reaktionssystem



- (a) Stellen Sie die Evolutionsgleichungen für $n_A(t), n_B(t), n_C(t)$ auf.

Hinweis: Geben Sie unbedingt als Zwischenschritte die Reaktionsraten, stöchiometrischen Koeffizienten und Produktionsraten an!

- (b) Welche Erhaltungsgrößen gibt es und welche Einschränkung an die Massen lässt sich machen?
- (c) Wir betrachten die Anfangsbedingungen $n_A(0) = 1, n_B(0) = 0, n_C(0) = 0$.

Leiten Sie die Relation $n_C(t) = \frac{1}{2}(1 - n_A(t) - n_B(t))$ her und leiten Sie danach für $k_3 = 2k_2$ das reduzierte System

$$\begin{aligned} n'_A(t) &= k_1(1 - 2n_A - n_B), \\ n'_B(t) &= k_1(1 - n_B) - 2k_2n_B^2 \end{aligned}$$

her.

- (d) Welche Ruhelage ergibt sich für das AWP aus (c) im Fall von $k_3 = 2k_2 = 2k_1 > 0$ für n_A, n_B, n_C ? Skizzieren Sie auch das Richtungsfeld.

3+2,5+1,5+5,5

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

