Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2017
Klausur | 21.08.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 31.08.2017 von 10:00–11:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	8	9	10	8	15	50	
Ihre Punkte							

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

a) Lösen Sie das lineare Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$x''(t) + x'(t) - 2\,x(t) = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$$

b) Betrachten Sie nun

$$x''(t) + x'(t) - 2\,x(t) = 4\,e^{-3\,t}, \quad x(0) = \alpha,\ x'(0) = \beta.$$

Bestimmen Sie die Anfangswerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass für die Lösung $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ gilt.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung an:

$$x''(t) + x'(t) - 2\,x(t) = 9\,e^{t}.$$

Hinweis: Es muss keine Matrixexponentialfunktion berechnet werden.

3+2,5+2,5

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Berechnen Sie die Fundamentalmatrix sowie die Übergangsmatrix zu

$$x' = A\,x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an.

b) Zeigen Sie, dass die Übergangsmatrix für drei Zeiten τ, ρ, σ die Semi-Gruppen-Eigenschaft bzw. die Cozykel-Eigenschaft erfüllt.

c) Skizzieren Sie das Phasenportrait in $x \in [-1,1]^2$. Berechnen Sie dazu das Eigensystem von A.

d) Welche Existenzintervalle hat das System falls die Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t} & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

geändert wird?

4,5+1+2,5+1

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Sei $p \in \mathbb{N}$. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x^p + y \\ y' &= -x - y^p. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die stationären Punkte in Abhängigkeit von p.

b) Untersuchen Sie mit dem Linearisierungskriterium die linearisierte Stabilität des Fixpunktes $(0,0)$. Welche Aussage lässt sich in Abhängigkeit von p machen?

c) Machen Sie für eine Lyapunov Funktion den Ansatz

$$V(x,y) = a(x^2 + y^2)$$

und bestimmen Sie Einschränkungen an a und p.

d) Für welche p ergibt sich welche Stabilität nach Lyapunov für den oben betrachteten Fixpunkt $(0,0)$?

2+4+2+2

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.
Gegeben seien zwei Populationen $x(t), y(t)$, die der Dynamik

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x\,(ay - b) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= y\,(cx - d) \end{aligned} \tag{$\star$}$$

mit Parametern $a, b, c, d > 0$ folgen.

a) Interpretieren Sie die Parameter und erläutern Sie die Situation der Populationen.

b) Berechnen Sie die Fixpunkte des Systems ($\star$) und ihre Stabilitätseigenschaften mit Hilfe des Linearisierungskriteriums.

c) Folgern Sie: Falls für die Anfangsbedingungen (ξ, η) gilt, $\xi < \frac{d}{c}$ und $\eta < \frac{b}{a}$, dann sterben die Populationen aus.

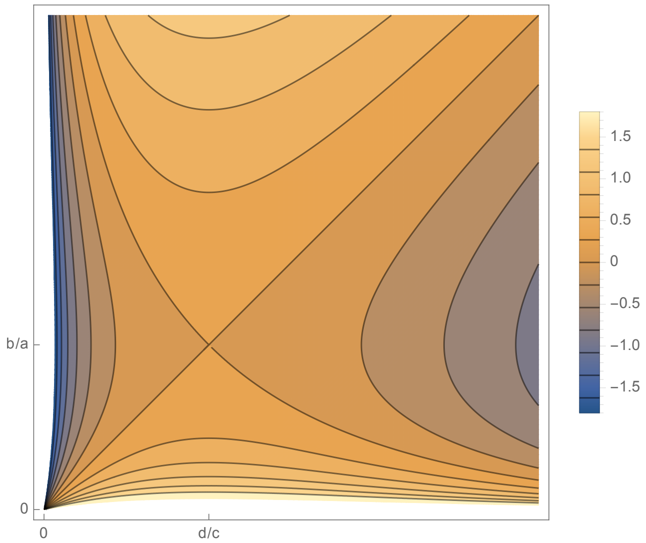
d) Zeigen Sie: Die Trajektorien des Systems erfüllen die Beziehung $H(x, y) = C =$ const., $C \in \mathbb{R}$ wobei H durch $H(x, y) = a\,y - b \ln y - c\,x + d \ln x$ gegeben ist.

e) Der Plot zeigt die Kontourlinien von H. Zeichnen Sie Beispiele für zwei verschiedene Anfangsbedingungen (ξ, η) ein, die

   a) zu einer aussterbenden und

   b) zu einer gedeihenden

   Population führen. Zeichnen Sie außerdem die Trajektorie ein, die eine aussterbende von einer gedeihenden Population trennt.



1+2,5+1+1,5+2

Aufgabe 5.

Betrachten Sie das chemische Reaktionssystem

$$A + 2\,X \xrightarrow{\mu} 3X,$$
$$X \xrightarrow{\lambda} A + B$$

mit den Anfangsbedingungen $n_A(0) = n_A^{(0)}, n_X(0) = n_X^{(0)}, n_B(0) = 0$.

(a) Stellen Sie die Evolutionsgleichungen für $n_A(t), n_X(t), n_B(t)$ auf.
Hinweis: Geben Sie unbedingt als Zwischenschritt die Reaktionsraten, stöchiometrischen Koeffizienten und Produktionsraten an!

(b) Welche Erhaltungsgrößen gibt es und was bedeuten diese für die Massen von A, X und B?

(c) Eliminieren Sie $n_A(t)$ aus der Gleichung für $n_X(t)$ und zeigen Sie, dass mit der Skalierung $\hat{n}_X = \dfrac{n_X}{n_A^{(0)} + n_X^{(0)}}$ und $\hat{t} = k_\lambda t$ die Gleichung

$$\frac{d\,\hat{n}_X}{d\,\hat{t}} = \gamma(1 - \hat{n}_X)\hat{n}_X^2 - \hat{n}_X \quad \text{mit } \gamma = \frac{k_\mu}{k_\lambda}(n_A^{(0)} + n_X^{(0)})^2$$

entsteht.

(d) Untersuchen Sie die stationären Punkte für $\hat{n}_X$ und ihre Stabilität in Abhängigkeit des Parameters γ.

(e) Skizzieren Sie die Trajektorien für den Fall $\gamma > 4$ und argumentieren Sie, dass $\lim_{\hat{t}\to\infty} \hat{n}_X(\hat{t}) > 0$ gilt, falls $\hat{n}_X(0) \geq \frac{1}{2}$.

3+3+3,5+3,5+2

Name: Matrikel-Nr.: