Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2016
Klausur | 04.10.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 28.10.2016 von 11:30–12:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	8	5	9	6	9	13	50
Ihre Punkte							

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2016
Klausur am 04.10.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

a) Lösen Sie das lineare Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

b) Betrachten Sie nun

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 9\,e^{-t}, \quad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

Bestimmen Sie die Anfangswerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass für die Lösung $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ gilt.

c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 0, \quad y(0) = a,\ y'(1) = b.$$

eine Lösung?

Hinweis: Es muss keine Matrixexponentialfunktion berechnet werden.

3+3+2

Aufgabe 2.

a) Zeichnen Sie das Phasenporträt von $\dot{x}(t) = x(t)\,(x(t)^2 - 1)^2$ und bestimmen Sie die $\omega-$Limesmenge von $x_0 = \frac{1}{2}$ (jeweils mit Begündung).

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)^2}{t^2},\ x(t_0) = x_0,$$

wobei $t_0 \in (0, \infty)$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das maximale Existenzintervall der Lösung in den Fällen $(i)\ x_0 > t_0,\ (ii)\ 0 \leq x_0 \leq t_0,\ (iii)\ x_0 < 0$.

2+3

Aufgabe 3.

Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y^3 - 3y^2 + 3y - x \\ (1 - x)y \end{pmatrix}$$

und betrachten das System

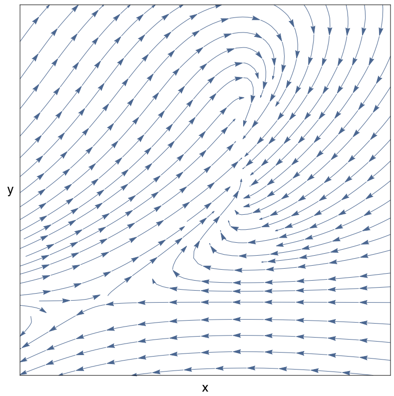
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)).$$

Außerdem ist die Funktion

$$V(x, y) = 2(x - 1)^2 + (y - 1)^4 - 4(x - 1)(y - 1)^3,$$

gegeben, welche eine Lyapunov-Funktion des Systems an der Stelle $(1, 1)$ ist. Eine Skizze des Vektorfelds sei gegeben durch:

Name: Matrikel-Nr.:



a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems.

b) Geben Sie zu allen Gleichgewichtspunkten das linearisierte System an.

c) Klassifizieren Sie die linearisierten Systeme, d.h. bestimmen Sie die Stabilitätseigenschaften und wenn möglich die Typen der Gleichgewichtspunkte.

d) Kann man aus diesen linearisierten Systemen etwas über die Stabilität des Originalsystems an den Gleichgewichtspunkten folgern?

e) Was bedeutet die Existenz der Lyapunov-Funktion an der Stelle $(1,1)$ für das System.

f) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Funktion V eine Lyapunov-Funktion bei $(1,1)$ ist? Schreiben Sie die Ungleichungen explizit hin. Sie müssen nicht zeigen, dass die Ungleichungen erfüllt sind.

1+2+2+1+1+2

Aufgabe 4.

Geben Sie jeweils die Lösungsgesamtheit $y(x)$ der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen an:

(a) $y' = -\dfrac{1+y}{x}$ mit $x \neq 0$,

(b) $y' - x^2 \cdot y = x^2$.

3+3

Aufgabe 5.

Wir betrachten die Liebesbeziehung zwischen Romeo und Julia. Sei dazu $R(t)$ Romeos Liebe zu Julia und $J(t)$ Julias Liebe zu Romeo. Es gelte $R(t), J(t) \in \mathbb{R}, R(t), J(t) \geq 0$, d.h. die Gefühle der beiden zueinander sind immer positiv. Außerdem seien die Werte M (Montague),C (Capulet) konstant. Die Liebesbeziehung kann durch

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= R\,(a - b\,J) - M \\ \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} &= J\,(-c + d\,R) - C \end{aligned} \qquad (\star)$$

beschrieben werden, wobei $M, C \geq 0$.

(a) Interpretieren Sie die Parameter a, b, c, d, M und C. Geben Sie dazu zuerst an, was diese Parameter im standard Räuber- Beute Modell bedeuten und dann, wie sie in Bezug auf Romeo und Julia zu interpretieren sind. Welche der Werte a, b, c, d sind positiv und welche negativ?

(b) Geben Sie für $M = 0, C = 0$ die Fixpunkte des Systsems $(\star)$ an.

(c) Finden Sie eine Skalierung $\hat{R} = \frac{R}{R_0}, \hat{J} = \frac{J}{J_0}, \hat{t} = \frac{t}{t_0}, \tilde{M}, \tilde{C}$, so dass sich ($\star$) auf das dimensionslose System

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{R}}{\mathrm{d}\hat{t}} &= \hat{R}\left(-1 - \hat{J}\right) - \tilde{M} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{J}}{\mathrm{d}\hat{t}} &= \gamma\hat{J}\left(-1 + \hat{R}\right) - \tilde{C} \end{aligned} \qquad (\star\star)$$

reduziert. Geben Sie die Definitionen für $R_0, J_0, t_0, \tilde{M}, \tilde{C}$ und γ an.

(d) Wie sind die Fixpunkte aus Teil (b) in dimensionslosen Koordinaten $(\hat{R}, \hat{J})$ definiert? (Also die Fixpunkte von System ($\star\star$) mit $\tilde{M} = \tilde{C} = 0$) Benutzen Sie (ausschließlich) das Linearisierungskriterium um zu zeigen, ob diese stabil, instabil oder undefiniert sind.

2 + 1 + 4 + 2

Aufgabe 6.

Betrachten Sie das chemische Reaktionssystem

$$\begin{aligned} A + X &\xrightarrow{\mu} 2X, \\ X &\xrightarrow{\lambda} A + B \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $n_A(0) = n_A^{(0)}, n_X(0) = 0, n_B(0) = 0$.

(a) Stellen Sie die Evolutionsgleichungen für $n_A(t), n_X(t), n_B(t)$ auf.

Hinweis: G

eben Sie als Zwischenschritt die Reaktionsraten, stöchiometrischen Koeffizienten und Produktionsraten an.

(b) Welche Erhaltungsgrößen gibt es und was bedeuten diese für die Massen von A, X und B?

(c) Eliminieren Sie $n_A(t)$ aus der Gleichung für $n_X(t)$ und zeigen Sie, dass mit der Skalierung $\hat{n}_X = \dfrac{n_X}{n_A^{(0)}}$ und $\hat{t} = k_\lambda t$ die Gleichung

$$\frac{d\,\hat{n}_X}{d\,\hat{t}} = (\gamma - 1)\hat{n}_X - \gamma\,\hat{n}_X^2 \quad \text{mit } \gamma = \frac{k_\mu\, n_A^{(0)}}{k_\lambda}$$

entsteht.

(d) Untersuchen Sie die stationären Punkte für $\hat{n}_X$ und ihre Stabilität in Abhängigkeit des Parameters γ.

3 + 3 + 3,5 + 3,5