Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2016
Klausur | 11.08.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 02.09.2016 von 11:30–13:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	8	5	9	6	13	9	50
Ihre Punkte							

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Gewöhnliche Differentialgleichungen | SS 2016
Klausur am 11.08.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

a) Lösen Sie das lineare Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

b) Betrachten Sie nun

$$y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = 4\,e^{-t}, \quad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

Bestimmen Sie die Anfangswerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass für die Lösung $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ gilt.

c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat

$$y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = a,\ y'(1) = b.$$

eine Lösung?

Hinweis: Es muss keine Matrixexponentialfunktion berechnet werden.

3+3+2

Aufgabe 2.

a) Zeichnen Sie das Phasenporträt von $\dot{x}(t) = x(t)\,(x(t)^2 - 1)^2$ und bestimmen Sie die $\omega-$Limesmenge von $x_0 = \frac{1}{2}$ (jeweils mit Begündung).

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)^2}{t^2},\ x(t_0) = x_0,$$

wobei $t_0 \in (0, \infty)$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das maximale Existenzintervall der Lösung in den Fällen $(i)\ x_0 > t_0,\ (ii)\ 0 \le x_0 \le t_0,\ (iii)\ x_0 < 0$.

2+3

Aufgabe 3.

Sei $c \in \mathbb{R}$. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x_1}(t) &= x_2(t) - x_1(t)\\ \dot{x_2}(t) &= c\,x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)\,x_3(t)\\ \dot{x_3}(t) &= x_1(t)\,x_2(t) - x_3(t)\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte.

b) Für welche Werte von c kann man mit dem Linearisierungskriterium schließen, dass die Lösung $x \equiv 0$ asymptotisch stabil ist?

c) Sei nun $c = 1$. Zeigen Sie, dass $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ eine Lyapunov-Funktion für das System ist. Kann man mit dem Stabilitätssatz von LaSalle schließen, dass $x \equiv 0$ asymptotisch stabil ist?

3+3+3

Aufgabe 4.

Geben Sie jeweils die Lösungsgesamtheit $y(x)$ der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen an:

(a) $y' = -\frac{1+y^2}{x \cdot y}$ mit $x \neq 0$,

(b) $y' - \frac{4}{x} \cdot y = x^3$ mit $x \neq 0$.

3+3

Aufgabe 5.

Wir betrachten das erweiterte Lotka-Volterra System

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= a\,N\left(\frac{N}{L}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right) - b\,N\,P \\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= -c\,P + d\,N\,P \end{aligned} \tag{$\star$}$$

wobei $a, b, c, d, L, K > 0$ und $L < K$.

(a) Betrachten Sie das erweiterte Lotka-Volterra Modell ($\star$) und interpretieren Sie die Parameter L und K.

(b) Finden Sie eine Skalierung $x = \frac{N}{N_0}, y = \frac{P}{P_0}, \hat{t} = \frac{t}{t_0}$, so dass sich ($\star$) auf das dimensionslose System

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\hat{t}} &= l\,k\,x\left(\frac{x}{l}-1\right)\left(1-\frac{x}{k}\right) - x\,y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\hat{t}} &= -\gamma\,y + x\,y \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

reduziert. Hierbei gilt $0 < l < k$ und $\gamma > 0$. Geben Sie die Definitionen für N_0, P_0, t_0, l, k und γ an.

(c) Finden Sie alle Fixpunkte des Systsems ($\star\star$) und begründen Sie, warum $l \leq \gamma \leq k$ gelten muss.

(d) Wählen Sie $k = 3$ und $l = 1$ und zeigen Sie, dass der innere Fixpunkt ($x, y > 0$) asymptotisch stabil ist für $\gamma > 2$.

(e) Argumentieren Sie, dass bei $\gamma = 2$ eventuell eine Hopf-Bifurkation vorliegen könnte.

1+4+3+3+2

Aufgabe 6.

Gegeben sei das Funktional $J : C^2([0,T]) \to \mathbb{R}$ mit

$$J(\theta) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 + mgl\cos(\theta(t))\right) dt. \tag{1}$$

und $l, m, g > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass (1) das Wirkungsfunktional zur Bewegung eines Pendels der Masse m, mit Faden der Länge l und konstanter Gravitation g ist. Dabei ist θ der Auslenkungswinkel gegenüber der Senkrechten.
Tipp: Fangen Sie mit der Formulierung der kinetischen und potentiellen Energie des Systems an.

(b) Bestimmen Sie die erste Variation von J.

(c) Sei y^* eine Extremstelle von J. Geben Sie die Differentialgleichung an, die y^* erfüllt.

3 + 3 + 3