Prof. Dr. S. Krumscheid
Dr. A. Mikhalev
E. Christhuraj

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Partial Differential Equations (CES+SISC) | WS 2020/21
Klausur | 24. March 2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am TBA von TBA Uhr im TBA statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	9	10	5	8	7	6	9	60
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

For each of the following functions check whether it is in $H^1(\mathbb{R})$ or not. Justify your answers. Calculate the weak derivative for the functions that are in $H^1(\mathbb{R})$.

(a)
$$u_1 = \begin{cases} (x+2)^2, & -2 < x < 0, \\ (x-2)^2, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

(b)
$$u_2 = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0, \\ (x-1)^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

(c)
$$u_3 = \begin{cases} \cos(x), & x \geq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2 + 2 + 2 = 6 Points

Aufgabe 2.

Consider the following problem with the Neumann boundary condition:

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f(x) & \text{in } \Omega := (0,1) \times (0,1) \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $f(x) = x_2^4$ if $x = (x_1, x_2)$ and $\alpha > 0$.

(a) Derive the weak formulation of the above problem.

(b) Show existance and uniqueness of the weak solution.

(c) Comment on existance of the weak solution for $\alpha = 0$.

3 + 4 + 2 = 9 Points

Aufgabe 3.

Let V be a Hilbert space and consider a bilinear form $a : V \times V \to \mathbb{R}$ as well as a linear form $b : V \to \mathbb{R}$ that satisfy the conditions of the Lax-Milgram theorem. Let also V_N be an N-dimensional subspace of V.

(a) Derive a linear system of equations for the Ritz-Galerkin solution $u_N \in V_N$ of the variational formulation in V defined by a and b.

(b) Which properties does the Ritz-Galerkin matrix A_N have? Is the linear Ritz-Galerkin system uniquely solvable?

(c) Consider the following minimization problem:

$$\min_{v \in V} J(v), \qquad J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega v dx,$$

there was a typo (missing square of the L^2-norm), which was noted in the first 45 minutes. All students were notified. where $V = H^1_0(\Omega)$ and $\Omega = (0,1) \times (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Use the M-dimensional subspace V_M spanned by the following basis functions:

$$\psi_{i,j}(x,y) = \sin(i\pi x)\sin(j\pi y), \qquad 1 \le i,j \le N, \qquad M = N^2,$$

to derive elements of the corresponding Ritz-Galerkin stiffness matrix and right hand side.

4 + 2 + 4 = 10 Points

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

We are given the reference triangle $\hat{K} := \{\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \xi_1 \le 1, 0 \le \xi_2 \le 1 - \xi_1\}$ and an arbitrary triangle K with nodes $p_1 = (0,0), p_2 = (1,2), p_3 = (4,0)$. Suppose that the following quadrature formula is given for the reference triangle:

$$\int_{\hat{K}} \hat{f}(\xi) d\xi \approx \frac{1}{2} \hat{f}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

The goal is to approximate integral $\int_K f(x)dx$ with $f(x) := x_1^2 - x_1 x_2$. Proceed as follows:

a) Determine the affine transformation $F_K : \hat{K} \to K$ such that

$$F_K(0,0) = p_1, \quad F_K(1,0) = p_2, \quad F_K(0,1) = p_3.$$

b) Transform the integral over K to an integral over the reference triangle $\hat{K}$. Then approximate the integral by applying the given quadrature formula.

2 + 3 = 5 Points

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

For $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ consider the initial value problem

$$u_t + \left(\frac{(u+2)^2}{2}\right)_x = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases}$$

a) Specify the shock speed s and the entropy condition,

b) Specify values u_L, u_R for which the solution is a shock and specify the solution,

c) Specify values u_L, u_R for which the solution is a rarefaction wave and specify the solution,

d) For both cases identified in b) and c), present Godunov's flux $g(u_L, u_R)$.

2 + 1 + 2 + 3 = 8 Points

Aufgabe 6.

For $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ consider the following system of linear conservation laws

$$\partial_t U(t,x) + A\partial_x U(t,x) = 0,$$

with matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ and initial condition

$$U(0,x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} & x < 0, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & x > 0. \end{cases}$$

Derive the solution by performing the following steps:

a) Diagonalise the system and transform the initial condition to reduce it to two independedn scalar linear conservation laws by changing variables. For this purpose use the eigenvalue decomposition of the matrix $A = T\Lambda T^{-1}$ with a diagonal matrix Λ.

b) Solve the acquired independent scalar conservation laws with corresponding initial conditions.

c) Transform the solutions back to the variable $U(t,x)$.

3 + 1 + 3 = 7 Points

Aufgabe 7.

Consider the following initial value problem

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0 \qquad \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

For its solution the following numerical scheme has been suggested

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{j+1}^n - u_j^n \right),$$

with

$$u_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u\left(t^n, x\right) \, dx,$$

on an equidistant grid with $t^n = n\Delta t$ and $x_j = j\Delta x$ where $n \in \mathbb{N}_0$ and $j \in \mathbb{Z}$.

a) Asses whether or not the scheme is conservative.

b) Determine the consistency order of the scheme.

c) Asses whether or not the scheme is monotone.

2 + 2 + 2 = 6 Points

Aufgabe 8.

Consider the following nonlinear scheme

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(g_{j+1/2} - g_{j-1/2}), \tag{1}$$
$$g_{j+1/2} = \overline{g}(u_j^n, u_{j+1}^n) \tag{2}$$

for $\lambda > 0$ and $j \in$ grid, with Lax-Friedrichs numerical flux

$$\overline{g}(u,v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) - \frac{1}{2\lambda}(v - u) \tag{3}$$

for $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Write down the scheme in incremental form as used in Harten's theorem.

b) Derive a CFL condition for λ such that the scheme satisfies the requirements of Harten's theorem.

3 + 6 = 9 Points