Prof. Dr. S. Noelle
M. Hassan, M. Sc
M. Sadr, M. Sc

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen V (CES) | WS 2018/19
Klausur | 14.02.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 28.02.2019 von 11:00–12:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	12	7	8	13	8	13	10	9	80
Ihre Punkte									

Klausur ☐ + Bonus ☐ = Gesamt ☐ Note: ☐

Aufgabe 1.

Prüfen Sie für die jede der folgenden Funktionen, ob sie in $H^1(\mathbb{R})$ liegt. Begründen Sie ihre Antworten. Berechnen Sie bei den Funktionen, die in $H^1(\mathbb{R})$ liegen, die schwache Ableitung.

(a)

$$u_1 = \begin{cases} \sin(x), & x \in (-2\pi, 0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$u_2 = \begin{cases} \cos(x), & x \in (-\frac{3}{2}\pi, 0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$u_3 = \begin{cases} \sin(x), & x < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

4+4+4 Punkte

Aufgabe 2.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \alpha u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $u \in H^1(\Omega)$ sowie $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung des obigen Problems her.

(b) Leiten Sie die Bilinearform her, die aus dem Randwertproblem resultiert. Zeigen Sie, dass diese koerziv in der $H^1(\Omega)$-Norm ist.

(c) Ist die Linearform, welche die rechte Seite beschreibt, stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2+2+3 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sind das Referenzdreieck $\hat{K} := \{\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1\}$ und ein Dreieckelement K mit den Eckpunkten $p_1 = (1,1), p_2 = (1,2), p_3 = (3,4)$. Auf dem Referenzdreieck ist die Quadraturformel

$$\int_{\hat{K}} \hat{f}(\xi) d\xi \approx \frac{1}{2} \hat{f}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

gegeben. Approximieren Sie das Integral $\int_K f(x)dx$ mit $f(x) := x_1 - x_2^2$. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

a) Bestimmen Sie die affine Transformation $F_K : \hat{K} \to K$, sodass

$$F_K(0,0) = p_1, \quad F_K(1,0) = p_2, \quad F_K(0,1) = p_3.$$

b) Transformieren Sie das Integral über K auf das Referenzdreieck $\hat{K}$ und approximieren Sie anschließend das Integral durch Anwenden der gegebenen Quadraturformel.

3+5 Punkte

Aufgabe 4.

Sei V ein Hilbert-Raum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $b : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform welche die Voraussetzungen des Lax-Milgram Satzes erfüllen. Sei V_N ein N-dimensionaler Unterraum von V.

a) Leiten Sie ein lineares Gleichungssystem für die Ritz-Galerkin Lösung $u_N \in V_N$ her.

b) Welche Eigenschaften hat die Ritz-Galerkin Matrix A_N? Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

c) Betrachten Sie das eindimensionale Poisson-Problem

$$-u'' = f,$$

mit periodischen Randbedingungen auf $[0, 2\pi]$. Wählen Sie einen N-dimensionalen Unterraum und stellen Sie die Ritz-Galerkin Matrix auf.

7+2+4 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

a) Für welche Zeit t^* entwickelt die Lösung als erstes eine Singularität?

b) Geben Sie den Fußpunkt $(x_0, 0)$ und den Punkt (x^*, t^*) auf der Charakteristik an, die in der Singularität endet.

6+2 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$u_t + \left(\frac{(u-1)^2}{2}\right)_x = 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

a) Geben Sie die Schockgeschwindigkeit s und die Lax-Stoßbedingung an.

b) Geben Sie Werte u_L, u_R an, für die die Lösung ein Lax-Schock ist, und geben Sie die Lösung an.

c) Geben Sie Werte u_L, u_R an, für die die Lösung eine Verdünnungswelle ist, und geben Sie die Lösung an.

d) Berechnen Sie für beide Fälle Godunov's Fluss $\overline{g}(u_L, u_R)$.

3+2+3+5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei ein 3-Punkt Finite-Differenzen-Verfahren

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=-1}^{1} c_k u_{j+k}^n \tag{3}$$

mit

$$c_{-1} = \frac{\lambda a}{2} + \frac{2}{9} \tag{4}$$

$$c_0 = \frac{5}{9} \tag{5}$$

$$c_1 = -\frac{\lambda a}{2} + \frac{2}{9} \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, dass das Verfahren (3) konservativ ist, und bestimmen Sie die numerischen Flüsse $g_{j+\frac{1}{2}} = g(u_j, u_{j+1})$ und den Viskositätskoeffizienten q.

b) Für welche $\nu = a\lambda$ ist das Verfahren von Konsistenzordnung 1? Für welches ν ist das Verfahren von Konsistenzordnung 2?

c) Für welche ν ist das Verfahren L^2-stabil?

d) Geben Sie die modifizierte Gleichung an.

4+3+2+1 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachten Sie das nichtlinear Verfahren

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(g_{j+1/2} - g_{j-1/2}), \tag{7}$$
$$g_{j+1/2} = \overline{g}(u_j^n, u_{j+1}^n) \tag{8}$$

mit Lax-Friedrichs numerischen Fluss

$$\overline{g}(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) - \frac{1}{2\lambda}(v - u) \tag{9}$$

Schreiben Sie das Verfahren in inkrementeller Form und geben eine CFL-Bedingung an, für welche die Voraussetzungen vom Harten's Lemma erfüllt sind.

9 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: