Vertr.-Prof. Dr. Jan Giesselmann

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen V (CES) | WS 2017/18
Klausur | 21.02.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 08.03.2018 von 10:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	12	8	12	8	10	8	10	12	80
Ihre Punkte									

Klausur ☐ + Bonus ☐ = Gesamt ☐

Note: ☐

Aufgabe 1.

Betrachten Sie das Riemann-Problem bestehend aus der hyperbolischen Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + \partial_x (u - u^2) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

und den Anfangsdaten

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases} .$$

Überprüfen Sie für jede der folgenden Funktionen

a)

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \frac{x}{t} \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{t}), & -1 < \frac{x}{t} < 3 \\ -1, & \frac{x}{t} \geq 3 \end{cases}$$

b)

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

c)

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \frac{x}{t} < 1 \\ -1, & \frac{x}{t} > 1 \end{cases}$$

ob sie eine schwache Lösung des Riemann-Problems ist und ob sie eine Entropielösung des Riemann-Problems ist.

4+4+4 Punkte

Aufgabe 2.

Betrachten Sie das Poisson-Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = x_2, \quad \int_\Omega u \, \mathsf{d}\, x = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = x_1, & \text{in } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, ||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$.

a) Leiten Sie eine schwache Formulierung des Poisson Problems her.

b) Zeigen Sie, dass die schwache Formulierung wohlgestellt ist.

3+5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Betrachten Sie die Burgers Gleichung

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \tag{1}$$

und Finite Volumen Verfahren der Form

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F(u_i^n, u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n, u_i^n)\right) \tag{2}$$

zu ihrer Lösung. In (2) bezeichne u_i^n den Wert der approximativen Lösung auf der i-ten Zelle zur Zeit $t = n\Delta t$ und $F(.,.)$ sei ein numerischer Fluss.

a) Geben Sie für die Burgers Gleichung die allgemeine Lösung eines Riemann-Problems an. Leiten Sie daraus den numerischen Fluss $F(.,.)$ für das Godunov-Verfahren her.

b) Geben Sie für Riemann-Probleme bei der Burgers Gleichung geeignete (im Sinne der Erhaltungsbedingung bei Approximativen Riemannlösern) lineare Riemann-Probleme an. Leiten Sie daraus den numerischen Fluss $F(.,.)$ für das Roe-Verfahren her.

c) Betrachten Sie die Burgers Gleichung für $x \in [0,3]$ mit periodischen Randbedingungen. Nehmen Sie an, die Ortsdiskretisierung sei äquidistant mit je 10 Zellen in den 3 Teilintervallen $[0,1)$, $(1,2)$ and $(2,3]$. Die Diskretisierung der Anfangdsdaten sei durch

$$u_i^0 = \begin{cases} 1, & i \in \{11, 12, \ldots, 20\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie sowohl für das Godunov- als auch für das Roe-Verfahren für die Wahl $\Delta t = \Delta x$ die approximative Lösung nach einem Zeitschritt $\{u_i^1 : i = 1, \ldots, 30\}$.

Ist $\sum_{i=1}^{30} u_i^1$ jeweils größer, kleiner oder gleich $\sum_{i=1}^{30} u_i^0$?

3+3+6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

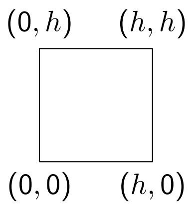
Aufgabe 4.

In 2D betrachten wir ein Gitter, bestehend aus achsenparallelen Quadraten der Seitenlänge h. Auf jedem Quadrat sei die Ansatzfunktion gegeben durch

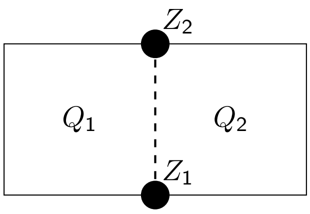
$$p(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy,$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y \in \mathbb{R}$.
Als Freiheitsgrade definieren wir die Werte der Ansatzfunktion auf den Ecken des Quadrates.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei den Freiheitsgraden um eine Familie unisolventer Funktionale handelt, d.h. aus den vier Funktionswerten an den Ecken lässt sich eindeutig eine Ansatzfunktion für das folgende Quadrat bestimmen.



(b) Wir wollen nun zeigen, dass der so aufgespannte Finite Elemente Raum aus stetigen Funktionen besteht. Betrachten Sie dazu zwei benachbarte Quadrate Q_1 und Q_2 mit Ansatzfunktionen, deren Funktionswerte auf den Endpunkten Z_1 und Z_2 der gemeinsamen Kante gleich sind. Zeigen Sie, dass die beiden Ansatzfunktionen auf der gesamten Kante übereinstimmen.



4+4 Punkte

Aufgabe 5.
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= 1 \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei sei Ω ein Quadrat mit Ecken

$$p_1 = (x_1, y_1) = (1, 0), \quad p_2 = (x_2, y_2) = (0, 1)$$
$$p_3 = (x_3, y_3) = (-1, 0), \quad p_4 = (x_4, y_4) = (0, -1),$$

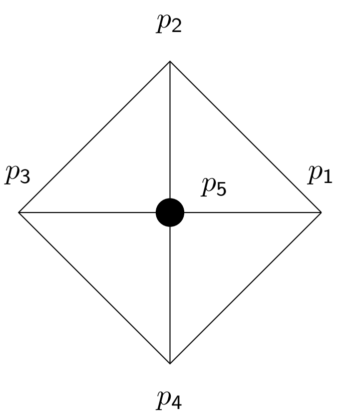
und Mittelpunkt

$$p_5 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p_i = (x_5, y_5) = (0, 0).$$

Die schwache Formulierung von (3) lautet

$$\begin{aligned} &\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{ so dass:} \\ &\int_\Omega \nabla\phi . \nabla u \, \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \int_\Omega u\phi \, \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{4}$$

Betrachten Sie auf Ω die unten gezeigte Triangulierung aus 4 Dreiecken



Die Finite Elemente Approximation u_h von (4) habe die Form

$$u_h = \alpha_1 \psi(x, y). \tag{5}$$

Dabei ist ψ bilinear auf jedem der vier Dreiecke und erfüllt

$$\psi(x_i, y_j) = \delta_{i5}\delta_{j5}, \quad \forall (i, j) \in \{(1,1), (2,2), \ldots, (5,5)\}$$
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Wert von α_1.

10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Betrachten Sie das Riemann-Problem bestehend aus dem linearen System hyperbolischer Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t U + A\partial_x U = 0, \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

mit $A := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$ und den Anfangswerten

$$U(x,0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, & x < 0, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Riemann-Problems.

8 Punkte

Aufgabe 7.

Wir formulieren das Poisson Problem mit homogenen Dirichlet Randdaten als ein System von Gleichungen

$$\nabla u = \sigma, \quad \nabla \cdot \sigma = -f, \quad \text{in} \quad \Omega, \quad f \in L^2(\Omega) \tag{6}$$

$$u = 0, \quad \text{in} \quad \partial\Omega \tag{7}$$

Sei

$$X := H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) | tr(v) = 0\}, \quad M := \left[L^2(\Omega)\right]^d$$

Um die Variationsformulierung von (6) zu erhalten, testen wir (6) mit $(\tau, v) \in M \times X$ und erhalten

Finde $(\sigma, u) \in M \times X$ so dass:

$$a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) = 0, \quad \forall \tau \in M, \tag{8}$$

$$b(\sigma, v) = l(v), \quad \forall v \in X. \tag{9}$$

a) Bestimmen Sie die Bilinearformen $a : M \times M \to \mathbb{R}$ und $b : M \times X \to \mathbb{R}$ und das lineare Funktional $l : X \to \mathbb{R}$ aus Gleichung (9).

b) Zeigen Sie, dass die Bilinearformen $a(.,.)$ und $b(.,.)$ stetig sind.

c) Zeigen Sie, dass die folgenden inf-sup-Bedingungen erfüllt sind:

$$\exists c_b > 0 \quad s.t \quad \inf_{v \in X/\{0\}} \sup_{\tau \in M/\{0\}} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_M \|v\|_X} \geq c_b \tag{10}$$

$$\exists c_a > 0 \quad s.t \quad \inf_{\sigma \in M/\{0\}} \sup_{\tau \in M/\{0\}} \frac{a(\sigma, \tau)}{\|\tau\|_M \|\sigma\|_M} \geq c_a \tag{11}$$

3+3+4 Punkte

Aufgabe 8.

Prüfen Sie für die jede der folgenden Funktionen, ob sie in $H^1(\mathbb{R})$ liegt. Begründen Sie ihre Antworten. Berechnen Sie bei den Funktionen, die in $H^1(\mathbb{R})$ liegen, die schwache Ableitung.

(a)

$$u_1 = \begin{cases} \sin(x), & x \in (-2\pi, 0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$u_2 = \begin{cases} \cos(x), & x \in (-\frac{3}{2}\pi, 0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$u_3 = \begin{cases} \sin(x), & x < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

4+4+4 Punkte

Mathematische Grundlagen V (CES) | WS 2017/18
Klausur am 21.02.2018 | Übersicht Klausuraufgaben