

**Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!**

**Mathematische Grundlagen V (CES) | WS 2016/17**  
**Klausur | 01.03.2017**

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

**Hinweise:**

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 15.03.2017 von 10:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

**Matrikelnummer:**    \_\_\_    \_\_\_    \_\_\_    \_\_\_    \_\_\_    \_\_\_

**Name, Vorname:**    \_\_\_\_\_

**Unterschrift:**    \_\_\_\_\_

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$
Punkte	6	4	5	5.5	3	7	5	4.5	40
Ihre Punkte									

Klausur    Bonus    Gesamt  
 +  =

Note:

**Aufgabe 1.**

Betrachten Sie folgende Funktionen  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Welche davon sind schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwache Ableitung, falls diese existiert. Welche der Funktionen sind Elemente von  $H^1(\mathbb{R})$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)

$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

b)

$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & -1 < x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

c)

$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0, \\ (x-1)^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

**2+2+2 Punkte**

Name:

Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 2.**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt. Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \alpha u &= f && \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= g && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit  $u \in H^1(\Omega)$  sowie  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

- (a) Leiten Sie die schwache Formulierung des obigen Problems her.
- (b) Leiten Sie die Bilinearform her, die aus dem Randwertproblem resultiert. Zeigen Sie, dass diese koerziv in der  $H^1(\Omega)$ -Norm ist.

**2+2 Punkte**

Name:

Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 3.**

Gegeben sei das Dreieck  $T$  mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(4, 1)$ , sowie das Referenzdreieck  $\hat{T}$  mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Auf dem Referenzdreieck sei die Quadraturformel

$$\int_{\hat{T}} \hat{f}(\hat{x}) d\hat{x} \approx \frac{1}{6} \left( \hat{f}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + \hat{f}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + \hat{f}\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right)$$

gegeben. Approximieren Sie mit Hilfe dieser Quadraturformel das Integral  $\int_T f(x) dx$  mit  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ , indem Sie

- eine lineare Abbildung  $F : \hat{T} \rightarrow T$  bestimmen und dann
- das Integral über  $T$  auf ein Integral über  $\hat{T}$  transformieren und berechnen.
- Wird in Teil b) das Integral exakt berechnet?

**2+2+1 Punkte**

Name:

Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 4.**

Ein Rechengebiet wird durch ein äquidistantes Gitter diskretisiert. Ein Ausschnitt des Gitters ist in Abbildung 1 zu sehen. Für die Diskretisierung werden  $Q_1$  finite Elemente verwendet. Dabei gilt

$$Q_1 = \{ p(x, y) \mid p(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \}$$

Leiten Sie Einträge des Stencils bezüglich des Knotens  $Z$  her, indem Sie den Laplace-Operator durch  $Q_1$  Elemente diskretisieren.

Dabei reicht es aus Symmetriegründen aus, wenn Sie die Einträge zwischen den  $Q_1$  Elementen der Knoten  $Z, N, NO$  bezüglich Knoten  $Z$  berechnen.

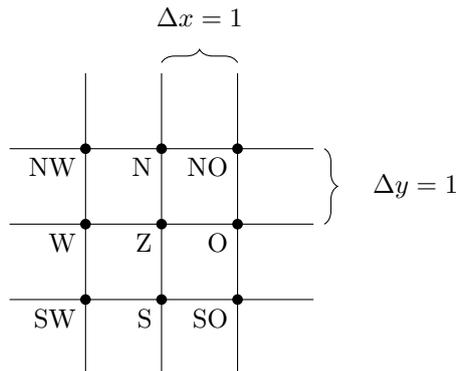


Abbildung 1: Kartesisches Gitter mit dem Punkt  $Z = (0, 0)$  und den acht Nachbarn.

**5.5 Punkte**

Name:

Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 5.**

Gegeben sei das Riemann-Problem

$$u_t + \left( \frac{u^4}{4} \right)_x = 0,$$
$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Geben Sie die Rankine-Hugoniot Bedingung für die obige Gleichung an.
- b) Geben Sie ein Entropie-Entropiefluss-Paar für das obige Riemann-Problem an.
- c) Bestimmen Sie eine Entropielösung des obigen Problems zum Zeitpunkt  $t = 1/2$  und skizzieren Sie diese. Skizzieren Sie zusätzlich die Charakteristiken.

**1.5+1.5 Punkte**

Name:

Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 6.**

Gegeben sei das System partieller Differentialgleichungen

$$\partial_t U(t, x) + A \partial_x U(t, x) = 0,$$

mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  und Anfangsbedingung

$$U(0, x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, & x < 0, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & x > 0. \end{cases}$$

- Diagonalisieren Sie das System und die Anfangsbedingung, so dass Sie zwei skalare Differentialgleichungen erhalten. Berechnen Sie dazu  $T$  und  $\Lambda$ , so dass  $A = T\Lambda T^{-1}$  mit Diagonalmatrix  $\Lambda$  und führen Sie anschließend eine geeignete Variablentransformation durch.
- Lösen Sie die skalaren Differentialgleichungen mit den entsprechenden Anfangsbedingungen.
- Transformieren Sie die Lösung zurück und geben Sie die Lösung für  $U(t, x)$  an.

**3+1.5+2.5 Punkte**

Name:

Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 7.**

Betrachten Sie die Advektionsgleichung

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

wobei  $a \in \mathbb{R}^+$ . Die Gleichung wird mittels finiter Differenzen und dem Upwind Verfahren wie folgt diskretisiert:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\lambda(u_i^n - u_{i-1}^n).$$

Hier repräsentiert  $u_i^n$  die Lösung an dem  $i$ -ten Gitterpunkt zum  $n$ -ten Zeitschritt. Weiter ist  $\lambda$  der Quotient aus  $\Delta t$  und  $\Delta x$ , also  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ .

Zu zeigen sind folgende Aussagen:

- Die Diskretisierung ist mindestens erster Ordnung konsistent.
- Der Verstärkungsfaktor  $C$  ist gegeben durch

$$C^2 = (1 - \lambda a + \lambda a \cos(\theta))^2 + (\lambda a \sin(\theta))^2$$

wobei  $\theta = k\pi\Delta x$  mit  $k$  als Wellenzahl der Fourier-Mode.

- Für welche  $\lambda$  ist die obige Diskretisierung stabil.

**2+1+2 Punkte**

Name:

Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 8.**

Gegeben sei der Čada-Schmidtman-Limiter

$$\phi_{\check{C}S}(\theta) = \max(0, \min(\phi_3(\theta), \max(-\theta, \min(2\theta, \phi_3(\theta), 1.5))))),$$

wobei  $\phi_3(\theta) = \frac{2+\theta}{3}$  gilt.

- a) Zeichnen Sie den Limiter für  $\theta \in [-4, 4]$  in das  $\phi$ - $\theta$ -Diagramm ein.
- b) Wieso ist der Čada-Schmidtman-Limiter nicht TVD?
- c) Welchen Nutzen könnte die Verletzung der TVD-Bedingung haben?

**2.5+1+1 Punkte**

Name:

Matrikel-Nr.:



Name:

Matrikel-Nr.:



Name:

Matrikel-Nr.:



**Mathematische Grundlagen V (CES) | WS 2016/17**  
**Klausur am 01.03.2017 | Übersicht Klausuraufgaben**