Prof. Dr. Martin Frank

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen V (CES) | WS 2015/16
Klausur | 26.02.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 08.03.2016 von 09:00–10:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	4	5	5	4	5	6	5	40
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Mathematische Grundlagen V (CES) | WS 2015/16
Klausur am 26.02.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Betrachten Sie folgende Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche davon sind schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwache Ableitung, falls diese existiert. Welche der Funktionen sind Elemente von $H^1(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)

$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

b)

$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & -1 < x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

c)

$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0, \\ (x-1)^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

2+2+2 Punkte

Aufgabe 2.

Vorgelegt sei das folgende Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit $\Omega = (-1,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $f \in L^2(\Omega)$.

a) Leiten Sie eine schwache Formulierung dieses Problems her.

b) Beweisen Sie eindeutige Lösbarkeit, indem Sie Koerzivität und Stetigkeit der Bilinearform in geeigneten Normen zeigen.

2+2 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,0),\ (2,2),\ (3,1)$, sowie das Referenzdreieck $\hat{T}$ mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$. Auf dem Referenzdreieck sei die Quadraturformel

$$\int\limits_{\hat{T}} \hat{f}(\xi)\, d\xi \approx \frac{1}{2} \hat{f}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

gegeben. Approximieren Sie mit Hilfe dieser Quadraturformel das Integral $\int\limits_T f(x)\, dx$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^2$, indem Sie

a) eine <u>lineare</u> Abbildung $F : \hat{T} \to T$ bestimmen,

b) das Integral über T auf ein Integral über $\hat{T}$ transformieren und approximieren.

2,5+2,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

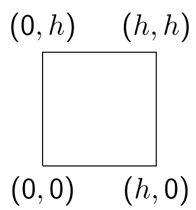
Aufgabe 4.

In 2D betrachten wir ein Gitter, bestehend aus achsenparallelen Quadraten der Seitelänge h. Auf jedem Quadrat sei die Ansatzfunktion gegeben durch

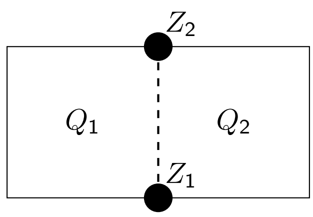
$$p(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy,$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y \in \mathbb{R}$.
Als Freiheitsgrade definieren wir die Werte der Ansatzfunktion auf den Ecken des Quadrates.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei den Freiheitsgraden um eine Familie unisolventer Funktionale handelt, d.h. aus den vier Funktionswerten an den Ecken lässt sich eindeutig eine Ansatzfunktion für das folgende Quadrat bestimmen.



(b) Wir wollen nun zeigen, dass der so aufgespannte Finite Elemente Raum aus stetigen Funktionen besteht. Betrachten Sie dazu zwei benachbarte Quadrate Q_1 und Q_2 mit Ansatzfunktionen, deren Funktionswerte auf den Endpunkten Z_1 und Z_2 der gemeinsamen Kante gleich sind. Zeigen Sie, dass die beiden Ansatzfunktionen auf der gesamten Kante übereinstimmen.



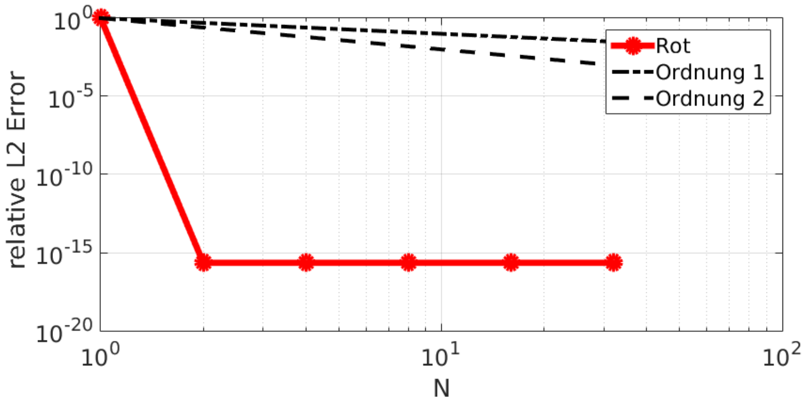
2,5+2,5 Punkte

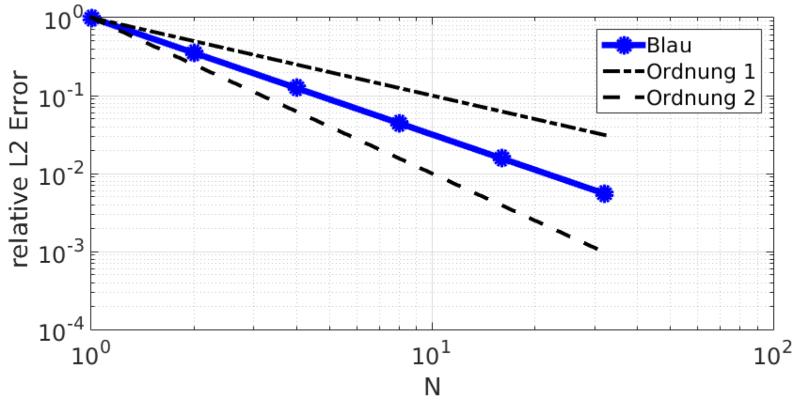
Aufgabe 5.

Wir betrachten das $1D$-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 2\delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Das Problem wird jeweils mit der Galerkin Methode und unterschiedlichen Ansatzräumen diskretisiert. Gegeben sind die folgenden Fehlerplots.





Ordnen Sie die verschiedenen Fehlerplots (Rot, Blau) den zu Grunde liegenden Ansätzen zu und geben Sie eine Begründung für die getroffene Zuordnung an.

(1) Die Diskretisierung $x_i = \frac{i}{2N-1}$, $i = 0, ..., 2N-1$ mit den Ansatzfunktionen aus

$$H_h = \{\phi \in C^0[0,1],\ \phi|_{[x_{k-1},x_k]} \in P_1,\ \phi(0) = \phi(1) = 0,\ k = 1, ..., 2N-1\},$$

wobei P_1 der Raum der Polynome von Grad 1 oder niedriger ist.

(2) Die Diskretisierung $x_i = \frac{i}{2(N-1)}$, $i = 0, ..., 2(N-1)$ für $N \geq 2$ und $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ für $N = 1$ mit den Ansatzfunktionen aus

$$H_h = \{\phi \in C^0[0,1],\ \phi|_{[x_{k-1},x_k]} \in P_1,\ \phi(0) = \phi(1) = 0,\ k = 1, ..., \max\{1, 2(N-1)\}\},$$

wobei P_1 der Raum der Polynome von Grad 1 oder niedriger ist.

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.
Wir betrachten das Riemann Problem für die Burgers-Gleichung.

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,\ x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$
$$u(0,x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Rechnen Sie nach, dass für den Zeitpunkt $t = 1$

$$u(1,x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

eine schwache Lösung ist.

(b) Rechnen Sie nach, dass für den Zeitpunkt $t = 1$

$$u(1,x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

eine schwache Lösung ist.

(c) Welche der beiden Lösungen genügt der Lax Entropiebedingung I?

2+2+1 Punkte

Aufgabe 7.
Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$
$$u(0,x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Die räumliche Diskretisierung erfolgt durch $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] = [i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}]$, sowie die zeitliche Diskretisierung durch $\left[t^k, t^{k+1}\right] = [k, k+1]$.
Führen Sie einen Schritt des Godunov Verfahrens durch. Projizieren Sie dazu zunächst den Anfangswert.

6 Punkte

Aufgabe 8.
Zur Lösung von

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wird das folgende numerische Verfahren vorgeschlagen:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{h}\left(u_{i+1}^j - u_i^j\right),$$

mit

$$u_i^j \approx \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(t^j, x)\, dx,$$

auf dem äquidistanten Gitter $t^j = jk$, sowie $x_i = ih$.

(a) Ist das Verfahren konservativ?

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.

(c) Ist das Verfahren monoton?

1+2+2 Punkte