Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Partielle Differentialgleichungen (CES) | SS 2019
Klausur | 10. August 2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 02. September 2019 von 15:00–16:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstraße 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	5	5	7	7	7	7	6	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Intervall $\Omega = (0, 2)$. Prüfen Sie für jede der folgenden Funktionen, ob sie in $H^2(\Omega)$ liegt. Geben Sie dafür Kandidaten für Du, D^2u in $L^2(\Omega)$ an und überprüfen Sie, ob dies tatsächlich schwache Ableitungen sind.

(a) $u_1(x) = |x - 1|$

(b) $u_2(x) = x^{\frac{5}{3}}$

3 + 3 = 6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \alpha u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot n &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $u \in H^1(\Omega)$ sowie $f \in L^2(\Omega)$ und konstantem $\alpha > 0$.

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung des obigen Problems her.

(b) Zeigen Sie, dass die Bilinearform, die aus dem Randwertproblem resultiert, koerziv in der $H^1(\Omega)$-Norm ist.

3 + 2 = 5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,2),\ (4,0)$, sowie das Referenzdreieck $\hat{T}$ mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$. Auf dem Referenzdreieck sei die Quadraturformel

$$\int\limits_{\hat{T}} \hat{f}(\hat{x})\ d\hat{x} \approx \frac{1}{6}\left(\hat{f}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) + \hat{f}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right) + \hat{f}\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)\right)$$

gegeben. Approximieren Sie mit Hilfe dieser Quadraturformel das Integral $\int\limits_T f(x)\ dx$ mit $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$, indem Sie

(a) eine <u>lineare</u> Abbildung $F : \hat{T} \to T$ bestimmen und dann

(b) das Integral über T auf ein Integral über $\hat{T}$ transformieren und berechnen.

(c) Wird in Teil b) das Integral exakt berechnet?

2 + 2 + 1 = 5 Punkte

Aufgabe 4.

Wir betrachten stückweise bilineare Finite Elemente auf einem äquidistantem, zweidimensionalen Gitter mit Gitterweite $\Delta x = \Delta y = 1$, das heißt auf jeder Zelle $K \subset \mathbb{R}^2$ ist:

$$p|_K(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy.$$

Für einen Knoten V bezeichnen wir die dazugehörige Formfunktion mit $p_V(x, y)$, d.h. $p_V(V) = 1$ und $p_V = 0$ für alle anderen Knoten. Sei $Z = (0, 0)$ der Knoten aus dem Inneren des Gebiets wie in Abbildung 1.

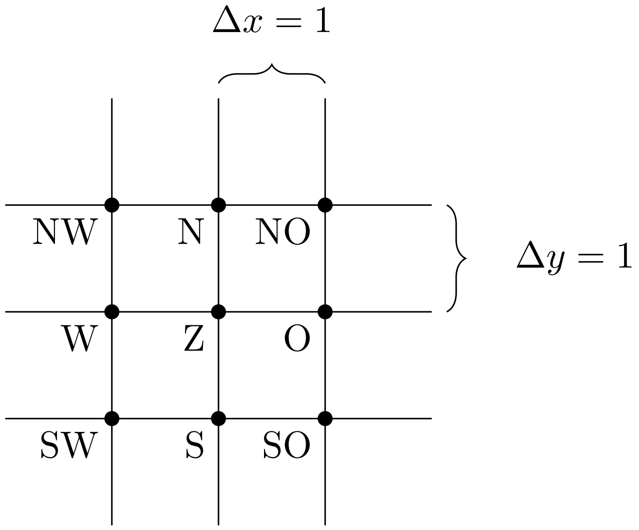

Abbildung 1: Kartesisches Gitter mit dem Punkt $Z = (0, 0)$ und den acht Nachbarn.

Nun soll der Laplace-Operator $(-\Delta)$ in folgenden Schritten lokal um Z diskretisiert werden:

(a) Bestimmen Sie die Formfunktionen $p_Z|_K, p_N|_K, p_{NO}|_K$ sowie deren Gradienten $\nabla p_Z|_K$, $\nabla p_N|_K$, $\nabla p_{NO}|_K$ auf dem Teilgebiet K, das von den Knoten Z, N, NO und O begrenzt ist.

(b) Sei $a(.,.)$ die zum Laplace-Operator gehörende Bilinearform. Berechnen Sie die zu Z gehörenden Elemente der Ritz-Galerkin Matrix $a(p_Z, p_V)$ für alle Knoten V (nutzen Sie dafür Teil (a) und Symmetriebetrachtungen aus).

3 + 4 = 7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$u_t + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = u_0(x) := \begin{cases} 1 & x < 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{9}x^3\right) & x \geq 0. \end{cases}$$

mit $f(u) := \frac{1}{4}u^4 + 2u$.

(a) Für welche Zeit t^* entwickelt die Lösung als erstes eine Singularität?

(b) Geben Sie den Fußpunkt $(x_0, 0)$ und den Punkt (x^*, t^*) auf der Charakteristik an, die in der Singularität endet.

5 + 2 = 7 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem:

$$u_t + \partial_x f(u) = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x) := \begin{cases} u_L & \text{falls } x < 0, \\ u_R & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

mit $f(u) := u^2 + 3u$.

(a) Geben Sie die Stoßgeschwindigkeit s.

(b) Geben Sie die Lax-Stoßbedingung an. Geben Sie Beispielwerte u_L, u_R an, die diese Bedingung erfüllen sowie die zugehörige Lösung u.

(c) Geben Sie die Bedingung an, unter die die Lösung eine Verdünnungswelle ist. Geben Sie Beispielwerte u_L, u_R an, die diese Bedingung erfüllen sowie die zugehörige Lösung u.

(d) Berechnen Sie den Godunov-Fluss $F_G(u_L, u_R)$ für $u_L = 1 \wedge u_R = 0$ und für $u_L = 0 \wedge u_R = 1$.

1 + 2 + 2 + 2 = 7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Zur Lösung von

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wird das folgende numerische Verfahren vorgeschlagen:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right),$$

mit

$$u_j^n \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t^n, x)\,dx,$$

auf dem äquidistanten Gitter $t^n = n\Delta t$, sowie $x_j = j\Delta x$.

(a) Schreiben Sie das Verfahren in der Standardform $u_j^{n+1} = \sum_{k=-1}^{1} c_k u_{j+k}^n$.

(b) Ist das Verfahren konservativ?

(c) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.

(d) Berechnen Sie den numerischen Viskositätskoeffizienten q.

(e) Für welche a ist das Verfahren stabil?

1+1+1+2+2 = 7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$
$$u(0,x) = u_0(x) := \begin{cases} 1, \; x < 0, \\ 0, \; x \geq 0. \end{cases}$$

Die räumliche Diskretisierung erfolgt durch $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] = [j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}]$, sowie die zeitliche Diskretisierung durch $\left[t^n, t^{n+1}\right] = [n, n+1]$.

(a) Projizieren Sie die Daten auf Ihre Zellmittelwerte

(b) Bestimmen Sie die verwendete CFL-Zahl

(c) Führen Sie einen Schritt des Godunov-Verfahrens aus.

1+2+3 = 6 Punkte