Vertr.-Prof. Dr. Jan Giesselmann

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen V (CES) | SS 2018
Klausur | 10.08.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 22.08.2018 von 10:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte	12	8	11	10	10	9	10	
Ihre Punkte								

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben ist das Intervall $\Omega = (0, 2)$. Prüfen Sie für jede der folgenden Funktionen, ob sie in $H^2(\Omega)$ liegt. Begründen Sie ihre Antworten. Berechnen Sie außerdem bei beiden Funktionen die erste und zweite distributionelle Ableitung.

a)
$$u_1(x) = |x - 1|$$

b)
$$u_2(x) = x^{\frac{5}{3}}$$

6+6 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sind das Referenzdreieck $\hat{K} := \{\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1\}$ und ein Dreieckelement K mit den Eckpunkten $p_1 = (1,1), p_2 = (1,2), p_3 = (3,4)$. Auf dem Referenzdreieck ist die Quadraturformel

$$\int_{\hat{K}} \hat{f}(\xi) d\xi \approx \frac{1}{2} \hat{f}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

gegeben. Approximieren Sie das Integral $\int_K f(x)dx$ mit $f(x) := x_1 - x_2^2$. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

a) Bestimmen Sie die affine Transformation $F_K : \hat{K} \to K$, sodass

$$F_K(0,0) = p_1, \quad F_K(1,0) = p_2, \quad F_K(0,1) = p_3.$$

b) Transformieren Sie das Integral über K auf das Referenzdreieck $\hat{K}$ und approximieren Sie anschließend das Integral durch Anwenden der gegebenen Quadraturformel.

3+5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u + 4u = x_1^4 & \text{in } \Omega := (0,1) \times (0,1) \\ \partial_n u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

a) Leiten Sie eine schwache Formulierung des Problems her.

b) Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung.

4+7 Punkte

Aufgabe 4.
Gegeben ist das lineare, hyperbolische System aus Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t U + A\partial_x U = 0, \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

mit $A := \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Lösung des Riemann-Problems zu den Anfangsdaten

$$U(x,0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, & x < 0, \\ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, & x > 0. \end{cases}$$

10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie die Entropie-Lösung von

$$\partial_t u - \partial_x u^2 = 0$$

in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ zu den Anfangsdaten

a)

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

b)

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

5+5 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben ist die schwache Formulierung

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{, sodass} \quad \int_\Omega \nabla\phi\nabla u \, dxdy + \int_\Omega u\phi \, dxdy = \int_\Omega \phi \, dxdy, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \tag{1}$$

des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Hierbei ist das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat mit Eckpunkten p_1, p_2, p_3, p_4 und Mittelpunkt p_5. Die Koordinaten der Punkte $p_1, \dots, p_5$ sind

$$\begin{aligned} p_1 &= (x_1, y_1) = (-1, 1) \\ p_2 &= (x_2, y_2) = (1, 1) \\ p_3 &= (x_3, y_3) = (1, -1) \\ p_4 &= (x_4, y_4) = (-1, -1) \\ p_5 &= (x_5, y_5) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p_i = (0, 0). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Finite Elemente Approximation u_h von (1), sodass

$$u_h = \alpha\psi(x, y), \tag{3}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ bilinear auf jedem der vier Quadrate $Q_i,\ i = 1, \dots, 4$ aus Abbildung 1 und

$$\begin{aligned} \psi(p_5) &= 1 \\ \psi(x, y) &= 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Geben Sie α und ψ der Approximation u_h explizit an.

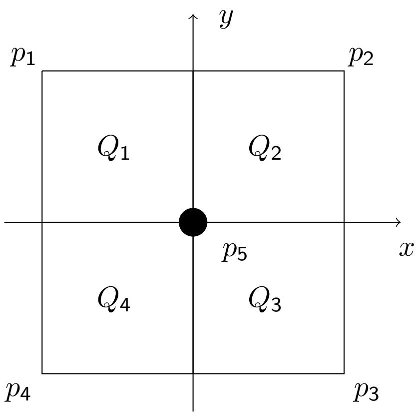

Abbildung 1: Unterteilung von Ω in 4 Quadrate ($Q_i,\ i = 1, \dots, 4$).

9 Punkte

Aufgabe 7.

Im Folgenden seien

- V und W Hilberträume,
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ und $b : V \times W \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen und
- $f : V \to \mathbb{R}$ und $g : W \to \mathbb{R}$ lineare und stetige Funktionale.

Außerdem sei $a(\cdot,\cdot)$ koerziv und symmetrisch.

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $(u,p) \in V \times W$ Lösung des Sattelpunktproblems

> Finde $(u,p) \in V \times W$, sodass
> $$L(u,w) \leq L(u,p) \leq L(v,p) \qquad \forall v \in V, w \in W \tag{4}$$
> mit
> $$L(v,w) := \frac{1}{2}a(v,v) - f(v) + b(v,w) - g(w).$$

dann ist (u,p) auch Lösung des Variationsproblems

> Finde $(u,p) \in V \times W$, sodass
> $$a(u,v) + b(v,p) = f(v) \qquad \forall v \in V \tag{5}$$
> $$b(u,w) = g(w) \qquad \forall w \in W. \tag{6}$$

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass für jedes stetige, lineare Funktional $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ gilt

$$a(u,v) = \tilde{f}(v) \quad \forall v \in V \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \operatorname*{argmin}_{v \in V} \frac{1}{2}a(v,v) - \tilde{f}(v).$$

10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: