Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen V (CES) | SS 2017
Klausur | 14.08.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 06.09.2017 von 11:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	4	5	5	3	7	5	5	40
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Betrachten Sie folgende Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche davon sind schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwache Ableitung, falls diese existiert. Welche der Funktionen sind Elemente von $H^1(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)
$$u(x) = 1 - |x|$$

b)
$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & -1 < x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

c)
$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0, \\ (x-1)^2 + 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

2+2+2 Punkte

Aufgabe 2.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \alpha u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $u \in H^1(\Omega)$ sowie $f \in L^2(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung des obigen Problems her.

(b) Leiten Sie die Bilinearform her, die aus dem Randwertproblem resultiert. Zeigen Sie, dass diese koerziv in der $H^1(\Omega)$-Norm ist.

2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,2),\ (4,0)$, sowie das Referenzdreieck $\hat{T}$ mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$. Auf dem Referenzdreieck sei die Quadraturformel

$$\int\limits_{\hat{T}} \hat{f}(\hat{x})\ d\hat{x} \approx \frac{1}{6}\left(\hat{f}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)+\hat{f}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)+\hat{f}\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)\right)$$

gegeben. Approximieren Sie mit Hilfe dieser Quadraturformel das Integral $\int\limits_T f(x)\ dx$ mit $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$, indem Sie

a) eine <u>lineare</u> Abbildung $F : \hat{T} \to T$ bestimmen und dann

b) das Integral über T auf ein Integral über $\hat{T}$ transformieren und berechnen.

c) Wird in Teil b) das Integral exakt berechnet?

2+2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

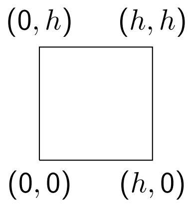
Aufgabe 4.

In 2D betrachten wir ein Gitter, bestehend aus achsenparallelen Quadraten der Seitelänge h. Auf jedem Quadrat sei die Ansatzfunktion gegeben durch

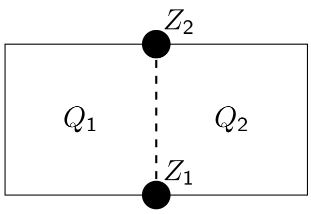
$$p(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy,$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y \in \mathbb{R}$.
Als Freiheitsgrade definieren wir die Werte der Ansatzfunktion auf den Ecken des Quadrates.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei den Freiheitsgraden um eine Familie unisolventer Funktionale handelt, d.h. aus den vier Funktionswerten an den Ecken lässt sich eindeutig eine Ansatzfunktion für das folgende Quadrat bestimmen.



(b) Wir wollen nun zeigen, dass der so aufgespannte Finite Elemente Raum aus stetigen Funktionen besteht. Betrachten Sie dazu zwei benachbarte Quadrate Q_1 und Q_2 mit Ansatzfunktionen, deren Funktionswerte auf den Endpunkten Z_1 und Z_2 der gemeinsamen Kante gleich sind. Zeigen Sie, dass die beiden Ansatzfunktionen auf der gesamten Kante übereinstimmen.



2.5 + 2.5 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei das Riemann-Problem

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,$$
$$u(0,x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Geben Sie die Rankine-Hugoniot Bedingung für die obige Gleichung an.

b) Geben Sie ein Entropie-Entropiefluss-Paar für das obige Riemann-Problem an.

c) Bestimmen Sie eine Entropielösung des obigen Problems zum Zeitpunkt $t = 1/2$ und skizzieren Sie diese. Skizzieren Sie zusätzlich die Charakteristiken.

1+1+1 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei das System partieller Differentialgleichungen

$$\partial_t U(t,x) + A\partial_x U(t,x) = 0,$$

mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und Anfangsbedingung

$$U(0,x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, & x < 0, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & x > 0. \end{cases}$$

a) Diagonalisieren Sie das System und die Anfangsbedingung, so dass Sie zwei skalare Differentialgleichungen erhalten. Berechnen Sie dazu T und Λ, so dass $A = T\Lambda T^{-1}$ mit Diagonalmatrix Λ und führen Sie anschließend eine geeignete Variablentransformation durch.

b) Lösen Sie die skalaren Diferentialgleichungen mit den entsprechenden Anfangsbedingungen.

c) Transformieren Sie die Lösung zurück und geben Sie die Lösung für $U(t,x)$ an.

3+1.5+2.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Betrachten Sie die Advektionsgleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0 \qquad \forall x \in \Omega,$$

wobei $a \in \mathbb{R}^+$. Die Gleichung wird mittels finiter Differenzen wie folgt diskretisiert:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\lambda}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n).$$

Hier repräsentiert u_i^n die Lösung an dem i-ten Gitterpunkt zum n-ten Zeitschritt. Weiter ist λ der Quotient aus Δt und Δx, also $\lambda = \Delta t/\Delta x$.
Zu zeigen sind folgende Aussagen:

a) Die Diskretisierung ist mindestens erster Ordnung konsistent.

b) Der Verstärkungsfunktion $C(\theta) = \dfrac{c_k^{n+1}}{c_k^n}$ is gegeben durch

$$C(\theta) = 1 - \hat{\imath}\lambda a \ \sin(\theta)$$

wobei $\theta = k\pi\Delta x$ mit k als Wellenzahl der Fourier-Mode.

c) Für welche λ ist die obige Diskretisierung stabil.

2+1+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Betrachte für drei Zellmittelwerte $u_{i-1},\ u_i,\ u_{i+1}$ die limitierten Rekonstruktionen

$$u^+(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = u_i + \frac{1}{2}\Phi(\theta_i)(u_i - u_{i-1})\ ,$$
$$u^-(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = u_i - \frac{1}{2}\Phi(\theta_i)(u_i - u_{i-1})$$

mit einer Limiter-Funktion Φ und $\theta_i = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}$.

a) Zeigen Sie, dass für $\Phi = \dfrac{1+\theta}{2}$ die Rekonstruktion $u^\pm = u_i \pm \dfrac{\Delta x}{2}\partial_x u|_i$ entsteht mit zentralen Differenzen für $\partial_x u|_i$.

b) Sei $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = (a, b, c)$. Aus Symmetriegründen muss gelten $u^+(a, b, c) = u^-(c, b, a)$. Leiten Sie daraus die Bedingung $\Phi(\theta) = \theta\ \Phi(\frac{1}{\theta})$ her ($\theta > 0$).

c) Gegeben sei der Limiter $\Phi(\theta) = min(\alpha\theta, \frac{1+\theta}{2}, \beta)$ mit $\alpha, \beta \geq 1$. Skizzieren Sie diesen Limiter für $\theta > 0$. Welche Beziehung für α, β folgt aus der Symmetrie in (b).

2.5+1+1.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: