Prof. Dr. Martin Frank

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen V (CES) | SS 2016
Klausur | 05.08.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 07.09.2016 von 09:00–10:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	4,5	4	5	5	3,5	6,5	5,5	40
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Mathematische Grundlagen V (CES) | SS 2016
Klausur am 05.08.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Betrachten Sie folgende Funktionen $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Welche davon sind schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwache Ableitung, falls diese existiert. Welche der Funktionen sind Elemente von $H^1([-1, 1])$? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)
$$u(x) = |x|^3$$

b)
$$u(x) = \sqrt{|x|}$$

c)
$$u(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

2+2+2 Punkte

Aufgabe 2.

Vorgelegt sei das folgende Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + |x|^2 = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, ||x|| < 1\}$.

a) Leiten Sie eine schwache Formulierung dieses Problems her.

b) Beweisen Sie eindeutige Lösbarkeit, indem Sie Koerzivität und Stetigkeit der Bilinearform in geeigneten Normen zeigen.

2+2,5 Punkte

Aufgabe 3.

Wir betrachten das $1D$-Randwertproblem: Finde u, so dass

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left((1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x}u(x)\right) = \sin(\pi|x|) \quad \text{für } x \in (-1, 1)$$
$$u(-1) = u(1) = 0.$$

(1) In welchem der folgenden Räume befindet sich die Lösung?

$$L^2([-1, 1]),\ H^{\frac{1}{2}}([-1, 1]),\ H^1([-1, 1])$$

Hinweis: In welchem Raum befindet sich die rechte Seite? Ist der Differentialoperator stetig und koerziv?

(2) Das Problem wird diskretisiert mit der Galerkin Methode und dem Ansatzraum

$$H_h = \{\Phi \in C^0(-1, 1) | \Phi_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1,\ \Phi(-1) = \Phi(1) = 0\}$$

mit $x_i = i/N$ für $i = -N, ..., N - 1$ und P_1 dem Raum der Polynome von Grad $p \leq 1$. Welche Konvergenzordnung gegen die exakte Lösung erwarten Sie jeweils in den Normen $L^2(-1, 1)$, $H^1(-1, 1)$, $L^\infty(-1, 1)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2+2 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,2),\ (4,1)$, sowie das Referenzdreieck $\hat{T}$ mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$. Auf dem Referenzdreieck sei die Quadraturformel

$$\int\limits_{\hat{T}} \hat{f}(\xi)\, d\xi \approx \frac{1}{6}\left(\hat{f}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) + \hat{f}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right) + \hat{f}\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)\right)$$

gegeben. Approximieren Sie mit Hilfe dieser Quadraturformel das Integral $\int\limits_T f(x)\ dx$ mit $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$, indem Sie

a) eine lineare Abbildung $F : \hat{T} \to T$ bestimmen und dann

b) das Integral über T auf ein Integral über $\hat{T}$ transformieren und berechnen.

c) Wird in Teil b) das Integral exakt berechnet?

2+2+1 Punkte

Aufgabe 5.

In 2D betrachten wir ein Gitter, bestehend aus Dreiecken. Den Raum der Finiten Elemente definieren wir wie folgt: Auf dem Einheitsdreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ betrachten wir die Punkte

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0)\\ P_2 &= \left(\frac{1}{2},0\right)\\ P_3 &= (0,1)\\ P_4 &= \left(0,\frac{1}{2}\right)\\ P_5 &= (1,0)\\ P_6 &= \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

sowie die Basisfunktionen

$$\begin{aligned} L_1(x,y) &= (1-x-y)(1-2x-2y)\\ L_2(x,y) &= 4x(1-x-y)\\ L_3(x,y) &= y(2y-1)\\ L_4(x,y) &= 4y(1-x-y)\\ L_5(x,y) &= x(2x-1)\\ L_6(x,y) &= 4xy\end{aligned}$$

Als Freiheitsgrade definieren wir die Werte des Polynoms

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i L_i(x,y)$$

auf den Punkten $P_1, ..., P_6$.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei den Freiheitsgraden um eine Familie unisolventer Funktionale handelt, d.h. aus den sechs Funktionswerten an den Punkten lässt sich eindeutig eine Ansatzfunktion auf dem gegebenen Dreieck bestimmen.

(b) Besteht der so aufgespannte Finite Elemente Raum aus stetigen Funktionen?

2,5+2,5 Punkte

Aufgabe 6.

Wir betrachten das Riemann Problem für die Burgers-Gleichung.

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \; x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

$$u(0,x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 3, & x \geq 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine schwache Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$, die der Lax Entropiebedingung I genügt.

3,5 Punkte

Aufgabe 7.

Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$
$$u(0,x) = \begin{cases} 1, \; x < 0, \\ 0, \; x \geq 0. \end{cases}$$

Die räumliche Diskretisierung erfolgt durch $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] = [i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}]$, sowie die zeitliche Diskretisierung durch $\left[t^k, t^{k+1}\right] = [k, k+1]$.

(a) Führen Sie einen Schritt des Lax-Wendroff Verfahrens durch. Projizieren Sie dazu zunächst den Anfangswert.

(b) Ist das Lax-Wendroff Verfahren zur Lösung des obigen Problems geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort.

5,5+1 Punkte

Aufgabe 8.

Zur Lösung von

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wird das folgende numerische Verfahren vorgeschlagen:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{h}\left(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}\right),$$

mit

$$u_i^j \approx \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(t^j, x)\, dx,$$

auf dem äquidistanten Gitter $t^j = jk$, sowie $x_i = ih$.
Hierbei handelt es sich um ein **implizites** Verfahren.

(a) Ist das Verfahren konservativ?

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.

(c) Bestimmen Sie die modifiziert Gleichung und treffen Sie darüber eine Aussage, ob für das Verfahren eine CFL-Bedingung gefordert werden muss.

1+2+2,5 Punkte