



Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2025
Klausur | Mittwoch, 25.02.2026

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet. Die handschriftlichen DIN A4 Blätter sind mit der Klausur abzugeben und können in der Einsicht zurückerhalten werden; eine Berücksichtigung bei der Bewertung der Klausur erfolgt nicht.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am Freitag, 13.03.2026 von 16:00 – 17:00 Uhr im Seminarraum 1090|328, Rogowski Gebäude statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanks-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: _ _ _ _ _

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	4	5.5	5.5	3.5	9	3.5	11.5	7.5	50
Ihre Punkte									

Klausur Bonus Gesamt

+ =

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Burgers-Gleichung

$$\begin{aligned}u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) &= u_0 \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.
- b) Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für die Charakteristiken $x(t)$ und skizzieren Sie die Charakteristiken qualitativ für beliebige Anfangswerte u_0 in der x, t -Ebene.
- c) Sei u_0 stetig differenzierbar, und $-\infty < u'_0 < 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Gleichung zur Zeit

$$T_s = \frac{-1}{\min_x u'_0(x)}$$

einen Schock entwickelt, also dass die Charakteristiken sich zum Zeitpunkt T_s schneiden.

1 + 1 + 2 = 4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

Gegeben sei folgende partielle Differentialgleichung (PDE) zweiter Ordnung.

$$\partial_{tt}u(x, t) = c^2 \partial_{xx}u(x, t). \quad (1)$$

- Benennen sie die gegebene PDE und die Rolle des Koeffizienten c .
- Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \xi(x, t) \\ \eta(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ct \\ x - ct \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die PDE (1) für eine transformierte Lösung $\tilde{u}(\xi, \eta)$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta) = 0$$

lautet.

- Betrachten Sie für $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ die folgenden Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, t = 0) &= g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t = 0) &= h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die d'Alembertsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x + ct) + g(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\nu) d\nu$$

die PDE (1) mit den gegebenen Anfangsbedingungen löst.

Hinweis: Sie dürfen das Ergebnis aus b) nutzen.

1 + 1.5 + 3 = 5.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Gegeben sei die folgende Funktionenfolge

$$f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} \quad \text{für } x \in \Omega = (-1, 1), k \in \mathbb{N}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $f_k \in C^1(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt und bestimmen Sie die ∞ -Norm

$$\|f_k\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_k(x)|.$$

- b) Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm eine Cauchyfolge ist.

Hinweis: Für $\alpha \geq 0$ gilt

$$\sqrt{1 + \alpha} \leq 1 + \sqrt{\alpha}.$$

- c) Bestimmen Sie den Grenzwert $f^* = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert f^* nicht in $(C^1, \|\cdot\|_\infty)$ liegt.
- d) Ist $(C^1, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum?

1.5 + 2.5 + 1 + 0.5 = 5.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

- a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ der Rechteckfunktion $f(x)$, definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq a \\ 0 & \text{falls } |x| > a \end{cases}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Eulersche Formel

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- b) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx$$

unter Verwendung des Ergebnisses aus Aufgabe 1. Eine direkte Integration ist nicht zulässig!

- c) Gegeben sei die Fourier-Transformierte $G(\omega)$ einer Funktion $g(x)$. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion:

$$h(x) = g(2x - 3)$$

Drücken Sie das Ergebnis durch $G(\omega)$ aus.

1 + 1 + 1.5 = 3.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

- a) Berechnen Sie die ersten zwei distributionellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|.$$

- b) Zeigen Sie, dass die Menge aller regulären Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ einen Vektorraum bildet.

- c) Zeigen Sie:

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$$

ist eine Fundamentallösung der Laplacegleichung in $\mathbb{R}^2$:

$$-\Delta\gamma = \delta.$$

Hinweis:

- γ ist harmonisch, d.h. $\Delta\gamma(x) = 0$ für $x \neq 0$.
- Führen Sie eine Nulladdition aus, um den Term $\phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle$ einzuführen.

2.5 + 1 + 5.5 = 9 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$f(x_k)$	6	$2 + 2i$	2	$2 - 2i$

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f; x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f; x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0, \dots, 3$$

erfüllt.

3.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

- a) Bestimmen Sie die Koeffizienten
- a
- ,
- b
- und
- c
- , sodass die finite Differenz:

$$af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h) \approx f'(x)$$

die erste Ableitung von f an der Stelle x mit möglichst hoher Ordnung approximiert. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung.

- b) Gegeben sei folgende Approximation von
- $f''(x)$
- für ausreichend glattes
- f
- :

$$\frac{2}{h_1 + h_2} \left(\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1} \right)$$

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung.

- c) Betrachten Sie das Konvektions-Diffusions-Problem

$$-u''(x) + u'(x) + u(x) = f(x)$$

auf einem nicht-uniformen Gitter, d.h. $h_i = x_i - x_{i-1}$ ist nicht zwangsläufig konstant für verschiedene i . Geben Sie eine finite Differenzen Approximation für diese Gleichung an, die mindestens erste Ordnung konsistent und stabil ist.

5 + 4 + 2.5 = 11.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung lautet $x^* = \frac{1}{69} \begin{bmatrix} 63 \\ 35 \\ 70 \end{bmatrix}$.

- Begründen Sie, dass das Gauss-Seidel-Verfahren gegen die Lösung dieses linearen Gleichungssystems konvergiert.
- Führen Sie einen Schritt des Gauss-Seidel-Verfahrens mit dem Startwert $x^0 = [1, 0, 0]^T$ durch.
- Wieviele Schritte sind höchstens notwendig, um ausgehend von $x^0 = [1, 0, 0]^T$ den Fehler im Startwert in der ∞ -Norm um den Faktor $R = 10^3$ zu reduzieren?

Hinweis: Sie können folgende Abschätzung verwenden: $\log_{10}(2) > \frac{3}{10}$

- Kann das konjugierte Gradientenverfahren für dieses lineare Gleichungssystem angewendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.5 + 2.5 + 3 + 0.5 = 7.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Viel Erfolg!