Dr. Andrés Rueda-Ramírez
Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Tamme Claus
Dr. Satyvir Singh

Applied and Computational Mathematics
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2024
Klausur | 19.02.2025

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 24.02.2025 von 10:30-11:30 Uhr im ACoM Seminarraum 1090|328 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	7.5	8.5	8.5	6.5	6	7.5	8	7.5	60
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Wir betrachten die folgende skalare partielle Differentialgleichung für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\partial_{xx}u + \partial_{yy}u + 4\partial_{xy}u = 2\alpha\partial_{xy}u + \partial_x u - \partial_y u \tag{1}$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $\alpha \in (\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}})$ ist die Gleichung elliptisch? Welche Gleichungen ergeben sich für $\alpha = \alpha_{\text{min}}$ und $\alpha = \alpha_{\text{max}}$?

b) Wir betrachten nun die Koordinaten-Transformation

$$(\xi, \eta) \longleftrightarrow (x, y) \quad \text{mit} \quad \xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

und

$$u(x, y) = \widehat{u}\,(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

mit einer neuen Funktion $\widehat{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass gilt

$$\partial_x u = \partial_\xi \widehat{u} + \partial_\eta \widehat{u}, \quad \partial_y u = \partial_\xi \widehat{u} - \partial_\eta \widehat{u} \quad \text{und} \quad \partial_{xy}u = \partial_{\xi\xi}\widehat{u} - \partial_{\eta\eta}\widehat{u}.$$

c) Berechnen Sie die Form der partiellen Differentialgleichung (1) im (ξ, η)-Koordinatensystem. Dazu dürfen die Formeln

$$\partial_{xx}u = \partial_{\xi\xi}\widehat{u} + \partial_{\eta\eta}\widehat{u} + 2\partial_{\xi\eta}\widehat{u}, \quad \partial_{yy}u = \partial_{\xi\xi}\widehat{u} + \partial_{\eta\eta}\widehat{u} - 2\partial_{\xi\eta}\widehat{u}$$

ohne Beweis benutzt werden.

d) Für $\alpha = \alpha_{\text{min}}$ ensteht die PDE

$$4\partial_{\xi\xi}\widehat{u} = 2\partial_\eta \widehat{u}.$$

Welchen Typ hat diese? (Tipp: Denken Sie sich η als Zeitvariable.) Was passiert für $\alpha = \alpha_{\text{max}}$?

7.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.
Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 && \text{in } \Omega = (0,1)^2,\\
u(x,0) &= 0, && x \in (0,1),\\
u_y(x,1) &= \sin(3\pi x), && x \in (0,1),\\
u(0,y) &= u(1,y) = 0, && y \in (0,1)
\end{aligned}$$

mithilfe eines Separationsansatzes $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Hinweis:

- Wählen Sie dabei eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$ negativ ist.
- Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ansätze equivalent.

$$\tilde{C}_1 \exp^{i\lambda x} + \tilde{C}_2 \exp^{-i\lambda x} = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

8.5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben ist das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + u(x,t) - \partial_{xx} u(x,t) &= \sin(\pi x), && x \in (0,1), t > 0 \\ u(0,t) &= 0, && t > 0 \\ \partial_x u(1,t) &= 0, && t > 0 \\ u(x,0) &= a, && x \in (0,1) \end{aligned}$$

mit einer konstanten Anfangsbedingung $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die zugehörigen reellen Eigenwerte λ und die normierten Eigenfunktionen $\varphi_\lambda(x)$ des Laplace Operators $-\partial_{xx}\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi_\lambda(x)$ bezüglich der gegebenen Randbedingungen.

> **Hinweis:** Überprüfen Sie, dass Eigenfunktionen über den Ansatz
>
> $$\varphi_\lambda(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$
>
> gegeben sind und bestimmen sie λ, C_1 und C_2.

b) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung und den Quellterm in den Eigenfunktionen. $\varphi_\lambda(x)$.

c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

8.5 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $\tilde{f} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\tilde{f}(x) = |x|$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als die periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$, d.h. für $x \in [2k-1, 2k+1)$ gilt $f(x) = |x - 2k|, \forall k \in \mathbb{Z}$.

a) Berechnen Sie die erste Ableitung DT_f im Sinne der Distributionen.

b) Berechnen Sie die zweite Ableitung D^2T_f im Sinne der Distributionen.

c) Sei T_g eine weitere reguläre Distribution mit kompaktem Träger. Berechnen Sie die Funktion h der Distribution T_h, sodass für die Faltung gilt

$$T_h = D^2T_f * T_g,$$

im Sinne der Distributionen.

d) Lösen Sie die PDE im Sinne der Distributionen (in $\mathbb{R}$)

$$-\partial_{xx}U = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{k^2} \delta_k \quad \text{in } \mathcal{D}'$$

wobei $\delta_k(x) = \delta(x - k)$ die Dirac-Delta Distribution in k ist.

Hinweis: Erinnerung: Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}$ ist $G(x) = \frac{1}{2}|x|$.

6.5 Punkte

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_j	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
$f(x_j)$	3	2	3

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form ($n = 1$)

$$T_3(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_3(f; x_j) = f(x_j)$.

6 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x), \quad x \in (0,1), \\ &u(0) = u(1) = 0 \\ &u'(0) = u'(1) = 0 \end{aligned}$$

für ein $u \in C^6((0,1))$ und $f \in C^0((0,1))$ soll auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ und Punkten $x_i = ih$ mit Hilfe eines 5-Punkt-Verfahrens der Form

$$\frac{1}{h^4}(\alpha u_{i-2} + \beta u_{i+1} + \gamma u_i + \beta u_{i-1} + \alpha u_{i+2}) = f_i$$

approximiert werden.

a) Wie müssen die Koeffizienten α, β, γ gewählt werden, damit das Verfahren konsistent von Ordnung 2 ist?

b) Stellen Sie das entsprechende lineare Gleichungssystem für die Werte $u_i, i = 1, \ldots, n-1$ auf. Setzen Sie dabei alle Randterme $u_{-1}, u_0, u_n, u_{n+1}$ auf 0.

c) Ist die Matrix im linearen Gleichungssystem diagonaldominant?

7.5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusions-Problem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 10u'(x) + u(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten (zentrale Differenzen)

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

b) Geben Sie eine mögliche Schrittweite h an, unter der A_h (streng) diagonaldominant ist.

c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine (streng) diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten?

8 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie, ob das gegebene lineare Gleichungssystem mit dem **Jacobi-Verfahren** und dem **Gauß-Seidel-Verfahren** konvergiert.

b) Welches der beiden Verfahren weist eine schnellere Konvergenz auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Durch die Zerlegung der Matrix A in eine linke untere Dreiecksmatrix L, eine Diagonalmatrix D und eine rechte obere Dreiecksmatrix R (d.h. $A = L + D + R$) lässt sich das **Successive Over-Relaxation (SOR)-Verfahren** wie folgt definieren:

$$x^{(k+1)} = (D + \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega R\right] x^{(k)} + \omega(D + \omega L)^{-1} b,$$

mit dem Relaxationsparameter $\omega \in [0, 2]$.

i) Was für ein Iterationsverfahren erhält man für $\omega = 1$?

ii) Konvergiert das SOR-Verfahren mit $\omega = \frac{3}{2}$ schneller als mit $\omega = 1$?

7.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.:

Viel Erfolg!