Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Michael Schlottke-Lakemper
Daniel Döhring
Dr. Andrea Hanke

Applied and Computational Mathematics
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2023
Klausur | 22.02.2024

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 12.03.2024 von 10:00-11:00 Uhr im 1090|334 (klPhys, Rogowski-Gebäude, Schinkelstraße 02, 52062 Aachen) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ________________________________

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	6.5	7.5	5	2.5	6	8.5	8	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

a) Entscheiden Sie, ob folgende Differentialgleichungen zweiter Ordnung *elliptisch*, *hyperbolisch* oder *parabolisch* sind. Begründen Sie ihre Antwort.

   (i) $\left(c_0^2 - u_x^2\right)\, u_{xx} - 2\, u_x u_y u_{xy} + \left(c_0^2 - u_y^2\right)\, u_{yy} = 0,$ mit $c_0 \in \mathbb{R}$ und $c_0 > 0$.

   (ii) $y\, u_{xx} + u_{yy} = 0$.

b) Gegeben ist das PDE-System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + 3\,\partial_{x_1} u_2 + 2\,\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_2 + \partial_{x_1} u_2 + 3\,\partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_3 + 2\,\partial_{x_1} u_2 + 3\,\partial_{x_1} u_3 + 2\,\partial_{x_2} u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das System in der Form

$$\partial_t \boldsymbol{U} + \nabla \cdot F(\boldsymbol{U}) = \partial_t \boldsymbol{U} + \mathrm{div} F(\boldsymbol{U}) = 0, \quad \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^3$$

geschrieben werden kann, und überprüfen Sie, ob das System *hyperbolisch* ist.

1.5 + 1 + 3.5 = 6 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

Wir betrachten harmonische Funktionen in 2D in kartesischen und Polar-Koordinaten. Für eine Funktion in Polar-Koordinaten $\tilde{u}(r,\varphi) = u(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$ gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = \partial_{rr}\tilde{u} + \frac{1}{r}\partial_r \tilde{u} + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}\tilde{u}$$

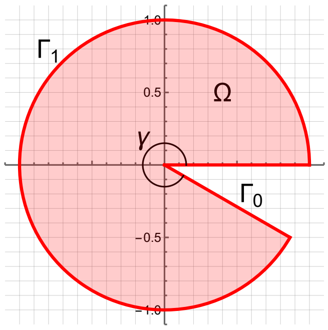
Diese Umrechnung kann für die Aufgabe ohne Beweis benutzt werden.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u(x,y) = (x + \alpha y)^2$ harmonisch?

(b) Finden Sie eine von φ unabhängige Funktion $\tilde{u}(r) \neq 0$ in Polar-Koordinaten, die harmonisch in 2D ist.

> **Hinweis:** Reduzieren Sie die Laplace-Gleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in r!

(c) Gegeben sei das Pacman-Gebiet mit einem Winkel $\gamma \in [0, 2\pi)$ und Radius $r \in [0, 1]$.



und das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_0 \\ u &= \sin\left(\frac{\pi}{\gamma}\varphi\right) \quad \text{auf} \quad \Gamma_1 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung in Polar-Koordinaten durch

$$u(r,\varphi) = r^{\pi/\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{\gamma}\varphi\right)$$

gegeben ist.

(d) Wo ist das Maximum von $u(r,\varphi)$ in Teil (c) und welchen Wert hat es? (ohne Rechnung, aber mit Begründung)

1 + 2 + 2 + 1.5 = 6.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Lösen Sie das folgende Problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L),\ t > 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(L,t) &= a\,t \\ u(x,0) &= u_0 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \end{aligned}$$

mit Konstanten a und u_0.

Hinweis: Homogenisieren Sie die Randbedingungen und nutzen Sie die Eigenfunktionen des Laplace Operators!

7.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der folgenden Distribution:

$$T_f\phi := (f, \phi), \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

wobei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & 0 < x < 1, \\ x-1, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass partielle Ableitungen von Distributionen vertauscht werden können, analog zu klassischen Funktionen: $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}T, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}T, \phi \right\rangle.$$

(c) Finden Sie eine Lösung U der Gleichung

$$-\Delta U = \frac{\partial}{\partial x_1}\delta, \quad \text{in } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right),$$

wobei δ die Dirac-Delta Distribution bedeutet.

Hinweis: Sie können die Lösung U in Abhängigkeit von G angeben, wobei G die Fundamentallösung $-\Delta G = \delta$ ist.

2 + 1.5 + 1.5 = 5 Punkte

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	3	2	3	4

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

welches die Daten interpoliert, also $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \ldots, 3$.

2.5 Punkte

Aufgabe 6.

Das periodische Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + u(x) &= f(x) \qquad x \in (a,b) \\
u(a) &= u(b)
\end{aligned}
$$

für ein $u \in C^4((a,b))$ und $f \in C^2((a,b))$ soll auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite h mithilfe eines kompakten Verfahrens gegeben durch

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i = \frac{1}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1})$$

approximiert werden. Nehmen Sie an, dass eine Ghost/Halo Zelle verwendet wird, also

$$u_{n+1} = u(b) = u(a)$$

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem der Form $Au = b$ für $u = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ auf, wobei u_1 bereits im inneren des Gebietes (a,b) liegt, also $x_1 > a$.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren konsistent ist von der Ordnung 4.

2.5 + 3.5 = 6 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2\big((0,1)\big)$ mit

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi^2}u''(x) + u'(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1),\\
&u(0) = u(1) = 0.
\end{aligned}
$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$
\begin{aligned}
u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}\\
u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}
\end{aligned}
$$

benutzt werden.

(a) Welche Ordnung hat diese Approximation der partiellen Differentialgleichung für allgemeines $f(x)$? (Kein Rechenweg erforderlich!)

(b) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(c) Geben Sie *eine* Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(d) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten?

(e) Geben Sie einen Differenzenquotienten für die erste Ableitung an, der eine höhere Konsistenzordnung als die Vorwärtsdifferenz hat. Von welcher Ordnung ist dann das gesamte Verfahren?

1 + 3.5 + 1 + 1.5 + 1.5 = 8.5 Punkte

Aufgabe 8.

a) Geben Sie die Jacobi- und Gauß-Seidel Iterationen für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ an. Dabei sei die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ quadratisch und habe die Zerlegung:
$$A = D - L - R,$$
wobei:
$$\begin{aligned} D &= \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{NN}), \\ L &= (l_{ij})_{i,j=1}^N, \quad l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{falls } i > j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ R &= (r_{ij})_{i,j=1}^N, \quad r_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{falls } i < j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Sei A nun wie folgt definiert:
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad d \neq 0, \quad ad \neq bc.$$
Geben Sie die Iterationsmatrizen G für beide Verfahren an.

c) Zeigen Sie für die Matrix A aus b), dass die Verfahren genau dann für alle Startwerte konvergieren wenn gilt:
$$\left| \frac{bc}{ad} \right| < 1.$$

d) Geben Sie mithilfe von c) an, für welche der folgenden Matrizen die Iterativen Verfahren konvergieren.

i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) Angenommen die Matrix A sei *nicht* symmetrisch positiv definit. Folgt daraus, dass die Gauß-Seidel Iteration nicht für alle Startwerte konvergiert? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

2+1+2+1.5+1.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Viel Erfolg!