Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Benjamin Berkels
Tamme Claus
Daniel Döhring

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2022
Klausur | 23.02.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 15.03.2023 von 10:00–12:00 Uhr im 1090|328 (Rogowski 328) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	7	9	7	6	3	5,5	6	6,5	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

a) Entscheiden Sie, ob folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung *elliptisch*, *hyperbolisch* oder *parabolisch* ist. Begründen Sie ihre Antwort.

$$(c_0^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c_0^2 - u_y^2)u_{yy} = 0, \quad c_0 \in \mathbb{R}, \quad c_0 > 0$$

b) Gegeben ist das PDE-System erster Ordnung für $U : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + 3\,\partial_{x_1} u_2 + 2\,\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_2 + \partial_{x_1} u_2 + 3\,\partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_3 + 2\,\partial_{x_1} u_2 + 3\,\partial_{x_1} u_3 + 2\,\partial_{x_2} u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Überprüfen Sie ob das System hyperbolisch ist.

6 Punkte

Aufgabe 2.
Gegeben sei folgende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$\partial_{tt}u(x,t) = c^2\partial_{xx}u(x,t). \qquad (1)$$

a) Benennen sie die gegebene PDE und die Rolle des Koeffizienten c.

b) Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+ct \\ x-ct\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die PDE (1) für eine transformierte Lösung $\tilde{u}(\xi,\eta)$

$$\partial_\xi\partial_\eta\tilde{u}(\xi,\eta) = 0$$

lautet.

c) Betrachten Sie für $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ die folgenden Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,t=0) &= g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,t=0) &= h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die d'Alembertsche Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+ct)+g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\nu)d\nu$$

die PDE (1) mit den gegebenen Anfangsbedingungen löst (**Hinweis:** sie dürfen das Ergebnis aus b) nutzen).

7 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben ist das Problem

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t) - u(x,t) + \sin(\pi x),\ \forall x \in (0,1),\ t > 0,$$

mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0,\ \forall t > 0, \\ u_x(1,t) &= 0,\ \forall t > 0, \end{aligned}$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = a,\ \forall x \in (0,1),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, das heißt, die Anfangsbedingung ist eine konstante Funktion.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen.

b) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung und den Quellterm in Eigenfunktionen.

c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

7 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Name: Matriculation-Nr.:

Aufgabe 4.

a) Seien X, Y zwei normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Geben Sie die Definition eines linearen Operators an und beweisen Sie, dass

$$T \text{ beschränkt} \Leftrightarrow T \text{ stetig.}$$

b) Gegeben sei die wesentlich beschränkte Funktion $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, V \in L^\infty(\mathbb{R})$. Betrachten Sie den Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} T : L^2(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{R}), \\ f &\mapsto Vf, \end{aligned}$$

wobei Vf eine Multiplikation im Lebesgue-Sinne mit $(Vf)(x) = V(x) \cdot f(x)$ a.e. darstellt. Zeigen Sie

i) T ist selbstadjungiert,

ii) und T ist stetig.

6 Punkte

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$f(x_k)$	6	$2+2i$	2	$2-2i$

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0,..,3$$

erfüllt.

3 Punkte

Aufgabe 6.

Das periodische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x) \qquad x \in (a,b) \\ u(a) &= u(b) \end{aligned}$$

für ein $u \in C^4((a,b))$ und $f \in C^2((a,b))$ soll auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite h mithilfe eines kompakten Verfahrens gegeben durch

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i = \frac{1}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1})$$

approximiert werden. Nehmen Sie an dass zwei Ghost/Halo Zellen verwendet werden, also

$$\begin{aligned} u_0 &= u_n \\ u_1 &= u_{n+1} \end{aligned}$$

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem der Form $Au = b$ für $u = (u_1, \ldots, u_n)$ auf.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren konsistent ist von der Ordnung 4.

5,5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 100u'(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mithilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Unter welchen Bedingungen ist A_h eine M-Matrix?

(c) Geben Sie eine alternative Diksretisierung des Problems an und zeigen Sie, dass damit ohne Zusatzbedingung die M-Matrix Eigenschaft gilt!

7 Punkte

Aufgabe 8.

a) Geben Sie die Jacobi- und Gauß-Seidel Iterationen für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ an. Dabei sei die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ quadratisch und habe die Zerlegung:

$$A = D - L - R,$$

wobei:

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{NN}),$$
$$L = (l_{ij})_{i,j=1}^N, \quad l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{falls } i > j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$R = (r_{ij})_{i,j=1}^N, \quad r_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{falls } i < j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Sei A nun wie folgt definiert:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad d \neq 0, \quad ad \neq bc.$$

Geben Sie die Iterationsmatrix für beide Verfahren an.

c) Zeigen Sie für die Matrix A aus b), dass die Verfahren genau dann für alle Startwerte konvergieren wenn gilt:

$$\left| \frac{bc}{ad} \right| < 1.$$

d) Geben Sie mithilfe von c) an, für welche der folgenden Matrizen die Iterativen Verfahren konvergieren.

i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) Angenommen die Matrix A sei *nicht* symmetrisch positiv definit. Folgt daraus, dass die Gauß-Seidel Iteration nicht für alle Startwerte konvergiert? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

8,5 Punkte

Name: Matriculation-Nr.: