Prof. Dr. Benjamin Stamm
Jun.-Prof. Sebastian Krumscheid

Applied and Computational Mathematics

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2021
Klausur | 25.02.2022

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 11.03.2022 von 10:00–11:00 Uhr im ACOM Seminarraum (1090|328) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	12	6	6	8	4	10	10	8	64
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_x(x,y) + 2yu_y(x,y) &= y, \quad x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R} \\ u(0,y) &= y, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

  i) Formulieren Sie dazu zunächst die Differentialgleichung, die die Lösung entlang der Charakteristiken erfüllt.

  ii) Lösen Sie anschließend diese Differentialgleichung.

c) Überprüfen Sie, ob die in b) bestimmte Lösung die Gleichung erfüllt.

4+6+2 = 12 Punkte

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der folgenden Distribution:

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 & |x| \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass partielle Ableitungen von Distributionen vertauscht werden können, analog zu klassischen Funktionen:

$$\forall T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) : \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) : \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} T, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle.$$

c) Zeigen Sie, dass $T_H' = \delta$, wobei

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion und δ die Dirac Distribution sind.

2+2+2 = 6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender Funktionen:

a) $f(x) = e^{-x^2/2}$

b) $f(x) = H(1 - x^2)$. Dabei ist H die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

4+2 = 6 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die folgende Funktionenfolge

$$f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} \quad \text{für} \quad x \in \Omega = (-1, 1),\ k = 1, 2, \dots\ .$$

a) Zeigen Sie, dass $f_k \in C^1(\Omega)$ für alle $k = 1, 2, \dots$ gilt und bestimmen Sie die ∞-Norm

$$\|f_k\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_k(x)|.$$

b) Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich dieser Norm eine Cauchyfolge ist.

c) Zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht in $(C^1, \|\cdot\|_\infty)$ liegt.

d) Folgern Sie, dass $(C^1, \|\cdot\|_\infty)$ kein Banachraum ist.

2+2+2+2 = 8 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

k	0	1	2	3
x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	3	1	2	3

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0,..,3$$

erfüllt.

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 10u'(x) + u(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten? Wie sähe die Matrix aus?

4+2+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

a) Bestimmen Sie die Koeffizenten a, b und c, sodass die finite Differenz:

$$af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h) \approx f'(x)$$

die erste Ableitung von f an der Stelle x mit möglichst hoher Ordnung approximiert. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung.

b) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f:

$$\frac{2}{h_1 + h_2}\left(\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1}\right)$$

Bestimmen Sie die Konsistenzsordnung.

5+5 = 10 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie zwei Schritte des konjugierten Gradientenverfahrens (CG) zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit rechter Seit $b = (2, 1, 0)^T$ und dem Startvektor $x_0 = (0, 0, 0)^T$ durch (das heißt: berechnen Sie x_2).

(b) Bestimmen Sie die Iterationsmatrix T des Gauß-Seidel-Verfahrens für die Matrix B.

(c) Konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren für die Matrix B für beliebige Startvektoren? Erklären Sie Ihre Antwort mithilfe von Aufgabenteil (b).

(d) Wie viele Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens sind bei Matrix B nötig, um den Startfehler garantiert um den Faktor $R = 1024$ zu reduzieren? Das heißt: geben Sie ein möglichst kleines k an, sodass für beliebige Startvektoren x_0 gilt:

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \frac{1}{1024} \|x_0 - x\|_\infty.$$

Hinweis: Betrachten Sie die quadrierte Iterationsmatrix T^2, die zwei Schritten des Gauß-Seidel-Verfahrens entspricht.

3+1+2+2 = 8 Punkte