Prof. Dr. Benjamin Stamm
Jun.-Prof. Sebastian Krumscheid, Ph.D.

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2020
Klausur | 23.03.2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am TBA von TBA Uhr im TBA statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5	6.5	5	6	4	6	6	6.5	45
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Sei $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Sei $u_0(x) = 1 - x$ und $\Gamma(r) = (0, r), r \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t u - u\partial_x u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u(\Gamma(r)) = u_0(r) & r \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

und überprüfen Sie explizit, ob die Anfangsbedingung sowie die PDE erfüllt ist.

5 Punkte

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass

$$\phi_{j,k}(x,y) = 2\sin(j\pi x)\sin(k\pi y) \quad j,k = 1,2,\ldots$$

die Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf $\Omega = [0,1]^2$ mit Nullrandbedingungen sind. Wie lauten die Eigenwerte?

b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y) = x\,(1-x)\,y\,(1-y)$$

in den Eigenfunktionen $\phi_{j,k}$.

c) Geben Sie die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u + f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \\ u &= 0 \quad \text{bei } t = 0 \end{aligned}$$

an.

1.5+2.5+2.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der folgenden Distribution:

$$T_f \phi := (f, \phi)$$

wobei

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 + x + x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} .$$

Dabei ist $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) Zeigen Sie: Eine Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

ist

$$G(x) = -\frac{1}{2}|x|,$$

d.h. es gilt im distributionellen Sinne

$$-\frac{d^2}{dx^2} G = \delta.$$

2.5+2.5 Punkte

Aufgabe 4.

a) Seien X, Y zwei normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Geben Sie die Definition eines linearen Operators an und beweisen Sie, dass

$$T \text{ beschränkt} \Leftrightarrow T \text{ stetig.}$$

b) Gegeben sei die wesentlich beschränkte Funktion $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, V \in L^\infty(\mathbb{R})$. Betrachten Sie den Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} T : L^2(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{R}), \\ f &\mapsto Vf, \end{aligned}$$

wobei Vf eine Multiplikation im Lebesgue-Sinne mit $(Vf)(x) = V(x) \cdot f(x)$ a.e. darstellt. Zeigen Sie

i) T ist selbstadjungiert,

ii) und T ist stetig.

3+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$f(x_k)$	6	$2+2i$	2	$2-2i$

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0, \dots, 3$$

erfüllt.

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi^2}u''(x) + u'(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1),\\
&u(0) = u(1) = 0.
\end{aligned}
$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$
\begin{aligned}
u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}\\
u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}
\end{aligned}
$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten?

2.5+1+2.5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung $x = (1, 2, 4)^T$.

a) Führen Sie jeweils einen Schritt des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x^0 = (1, 1, 1)^T$ durch.

b) Gegeben sei nun die Richardson Methode

$$x^{k+1} = x^k + \omega(b - Ax^k)$$

für das Gleichungssystem $Ax = b$.

i) Für welche Werte ω konvergiert die Methode?

ii) Wie lautet der optimale Wert für ω, sodass das Verfahren unabhängig vom Startvektor x^0 am schnellsten konvergiert?

3+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

(a) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f:

$$\frac{2}{h_1+h_2}\left(\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}-\frac{f(x)-f(x-h_1)}{h_1}\right)$$

Bestimmen Sie die Ordnung dieser finiten Differenz als Approximation von f''.

(b) Die erste Ableitung einer Funktion u an der Stelle ξ soll mit Hilfe einer finiten Differenz, die die Funktionsauswertungen von u an den Stellen ξ, $\xi+h_1$ und $\xi+h_1+h_2$ benutzt, approximiert werden, d.h.

$$u'(\xi)=a\,u(\xi)+b\,u(\xi+h_1)+c\,u(\xi+h_1+h_2)+R(u,h),$$

wobei $h=\max(h_1,h_2)$ und $R(u,h)=\mathcal{O}(h^p)$ der Fehler der finiten Differenz ist. Bestimmen Sie a,b,c so, dass p maximal wird. Wie groß ist dieses?

Hinweis: Entwickeln Sie u um die Stelle ξ.

2.5+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: