Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2018
Klausur | 05.02.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 13.02.2019 von 11:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstraße 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	4	4	4	8	4	9	9	8	50
Ihre Punkte									

Klausur ☐ + Bonus ☐ = Gesamt ☐

Note: ☐

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Cauchy-Problems für die eindimensionale Wellengleichung

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0, && \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R} \\
u(0,x) &= xe^x && \text{für } x \in \mathbb{R} \\
u_t(0,x) &= -x^2 && \text{für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

4 Punkte

Aufgabe 2.

Wir betrachten Polarkoordinaten (r, φ) mit

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r > 0, \ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Sei u eine harmonische Funktion in Polarkoordinaten, d.h. $u = u(r, \varphi)$, in der Kreisscheibe

$$B = \{(r, \varphi) : r < 2\}$$

mit $u(2, \varphi) = 3 \sin \varphi + 1$.

(a) Bestimmen Sie $u(0, 0)$.

(b) Bestimmen Sie $\max\limits_{(r,\varphi) \in \bar{B}} u(r, \varphi)$.

2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Zeigen Sie: Eine Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

ist

$$G(x) = -\frac{1}{2}|x|,$$

d.h. es gilt im distributionellen Sinne

$$-\frac{d^2}{dx^2}G = \delta.$$

4 Punkte

Aufgabe 4.

Wir betrachten die Folge periodischer Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$u_n(x) := e^{inx},$$

sowie die drei Operatoren

$$\begin{aligned}(Iu)(x) :=& u(x), && \text{(Identität)},\\ (Du)(x) :=& \frac{d}{dx}u(x), && \text{(Ableitung)},\\ (Su)(x) :=& \int_0^x u(s)\,ds, && \text{(Stammfunktion)}.\end{aligned}$$

a) Untersuchen Sie, ob die Folgen $(Iu_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Du_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(Su_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2\big([0,2\pi]\big)$
   i) beschränkt oder unbeschränkt
   ii) konvergent oder divergent

   sind.

b) Sind die Operatoren I und D beschränkt und/oder kompakt im L^2-Sinne? Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabeteil a).

c) (dies ist eine Zusatz-Frage, die nicht bewertet wird) Stellen Sie eine allgemeine Vermutung über die Beschränktheit und Kompaktheit von S im L^2-Sinne auf.

6+2+0 Punkte

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(x_k)$	2	0	2	0

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \ldots, 3$.

4 Punkte

Aufgabe 6.

Gesucht ist eine Finite Differenzen Formel für die erste Ableitung $u'(x_i)$ basierend auf den Werten von u bei $x_{i-1},\ x_i$ und x_{i+2} eines äquidistanten Gitter mit Gitterweite Δx

$$u'(x_i) = \underbrace{\alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+2}}_{=:\delta_i[u]} + \mathcal{O}(\Delta x^p). \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie α, β und γ, so dass die Konsistenzordnung p größtmöglich ist und geben Sie p an.

b) Zeigen Sie, dass für eine Funktion $u \in C^3(I)$ mit $I \subset \mathbb{R}$ eine Fehlerabschätzung der Form
$$|u'(x_i) - \delta_i[u]| \leq C\|u'''\|_{\infty,I}\ \Delta x^2$$
gilt und geben Sie einen sinnvollen Wert für C an.

9 Punkte

Aufgabe 7.

Das Helmholtz Problem:

Gesucht ist $u \in C^2((0,1))$, sodass

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x), && \text{für } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

soll mit Hilfe einer zentralen Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter mit den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ übergeführt werden.

a) Bestimmen Sie die Matrix A.

b) Geben Sie Schranken für
   - die Eigenwerte von A,
     Hinweis: Gerschgorin Kreise.
   - die L_2-Norm von A und von A^{-1} und
   - die Konditionszahl von A an.

c) Bestimmen Sie die
   - L_∞-Norm von A und
   - L_1-Norm von A.

9 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mit Lösung $x = (-\frac{13}{56}, -\frac{13}{16}, -\frac{29}{56})^T$.

a) Konvergieren das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^3$?

b) Führen Sie einen Schritt mit dem Jacobi-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (1, 0, 0)^T$.

c) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen zur Anwendung des CG-Verfahrens gegeben sind und führen Sie einen Schritt mit dem CG-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (0, -1, -1)^T$.

d) Welches Ergebnis erhält man nach drei Schritten mit dem CG-Verfahren?

8 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2018
Klausur am 05.02.2019 | Beanstandungen der Klausurkorrektur

Name, Vorname	Matrikelnummer

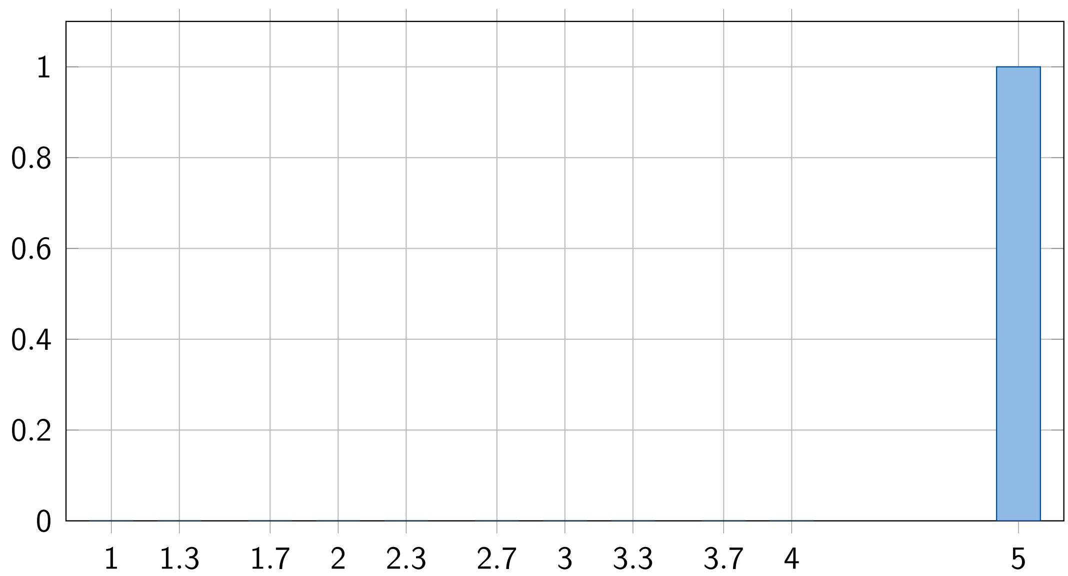
Aufgabe	Erklärung der Beanstandungen

Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2018
Klausur am 05.02.2019 | Notenskala und Statistik

Note	Punkte	Statistik
1.0	47.5 – 50.0	0
1.3	45.0 – 47.0	0
1.7	42.5 – 44.5	0
2.0	40.0 – 42.0	0
2.3	37.5 – 39.5	0
2.7	35.0 – 37.0	0
3.0	32.5 – 34.5	0
3.3	30.0 – 32.0	0
3.7	27.5 – 29.5	0
4.0	25.0 – 27.0	0
5.0	00.0 – 24.5	1

Notenskala



Notenstatistik