Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2017
Klausur | 07.02.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 16.02.2018 von 12:00–14:00 Uhr im Seminarraum 327 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	7	9	6	4	6	5	7	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Entscheiden Sie, ob folgende Differentialgleichungen zweiter Ordnung *elliptisch*, *hyperbolisch* oder *parabolisch* sind. Begründen Sie ihre Antwort.

a) $(c_0^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c_0^2 - u_y^2)u_{yy} = 0, \qquad c_0 \in \mathbb{R},\, c_0 > 0$

b) $yu_{xx} + u_{yy} = 0$

c) $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} - 4u_{xy} + 3u_x = u$

6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Sei $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y) \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Eigenfunktionen u und zugehörigen Eigenwerte λ des Laplace-Operators auf Ω mit $u|_{\delta\Omega} = 0$. Gesucht sind also alle nicht verschwindenden $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \lambda u(x,y) & (x,y) \in \Omega & \text{(1a)} \\ \quad u(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega\,. & \text{(1b)} \end{cases}$$

Gehen Sie dabei in zwei Schritten vor:

a) Lösen Sie zuerst das eindimensionale Eigenwertproblem:
Bestimmen Sie alle Funktionen $f \in C^2((0, L)) \cap C([0, L])$ und $\mu \in \mathbb{R}$, sodass

$$-f''(x) = \mu f(x) \tag{2}$$

mit $f(0) = f(L) = 0$.

b) Reduzieren Sie Gleichung (1a) mit Hilfe des Ansatzes

$$u(x,y) = v(x)\, w(y)$$

auf zwei Gleichungen vom Typ (2).
Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil a) die Eigenfunktionen u und zugehörigen Eigenwerte λ (Gleichungen (1a) und (1b)) und nennen Sie den kleinsten Eigenwert.

7 Punkte

Aufgabe 3.

Es sei $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

sodass u die homogenen Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0 \tag{4}$$

und die Anfangsbedingung

$$u(0, x) = u_0(x) = 3 + \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \tag{5}$$

erfüllt. Gehen Sie bei der Bestimmung der Lösung u wie folgt vor:

a) Verwenden Sie den Separationsansatz $u(t, x) = T(t)X(x)$ und bestimmen Sie alle Lösungen $X_n(x)$, die sich aus Gleichung (3) zusammen mit den Randbedingungen (4) ergeben.

b) Bestimmen Sie die zu $X_n(x)$ gehörigen $T_n(t)$.

c) Bestimmen Sie die Koeffizienten A_n der allgemeinen Lösung

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(t) X_n(x)$$

so, dass $u(t, x)$ die Anfangswertbedingung (3) erfüllt.

d) Wie würde man die Koeffizienten A_n bestimmen, wenn die Anfangsbedingung $u_0 \in C([0, L])$ beliebig ist?

9 Punkte

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der folgenden Distributionen.

a) $T_f\phi := (f, \phi)$ wobei $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 + x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$.

b) $T_g\phi := -\phi(-1) + 2\phi(0) - \phi(1)$.

Dabei ist $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Identifizieren Sie die distributionelle Ableitung formal mit einer Funktion der Form $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6 Punkte

Aufgabe 5.

Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}$

$$E(x) := e^{-ax}H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Fundamentallösung für den Differentialoperator L mit $Lu := \frac{d}{dx}u + au$ ist. H bezeichnet die Heaviside-Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

4 Punkte

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender Funktionen:

a) $f(x) = e^{-x^2/2}$

b) $f(x) = H(1 - |x|)$. Dabei ist

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion.

6 Punkte

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	2	0	-2	0

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also

$$T_4(f;x_k) = f(x_k) \qquad \text{für } k = 0,\dots,3.$$

5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Die erste Ableitung einer Funktion u an der Stelle ξ soll mit Hilfe einer Differenzenformel, die die Funktionsauswertungen von u an den Stellen ξ, $\xi + h_1$ und $\xi + h_1 + h_2$ benutzt, approximiert werden, d.h.

$$u'(\xi) = a\,u(\xi) + b\,u(\xi + h_1) + c\,u(\xi + h_1 + h_2) + R(u, h).$$

Dabei ist $h = \max(h_1, h_2)$ und $R(u, h) = \mathcal{O}(h^p)$ der Fehler der Differenzenformel. Bestimmen Sie a, b, c so, dass p maximal wird und geben Sie p an.

7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: