Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Mike Espig

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2016/17
Klausur am 13.02.2017 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Burgers-Gleichung

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$$
$$u(x,0) = u_0 \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.

b) Wie verhält sich die Lösung entlang der Charakteristiken?

c) Sei u_0 stetig differenzierbar, und $-\infty < \min u_0' < 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Gleichung zur Zeit
$$T_b = -1/\min u_0' \tag{1}$$
einen Schock entwickelt, bzw. dass die Charakteristiken sich zum Zeitpunkt T_b schneiden.

4,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Gegeben sei das Randwertproblem:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= 0, && \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) && \text{(2a)}\\
\text{mit} \quad u(x,0) &= 0, && \text{für } 0 < x < 1 && \text{(2b)}\\
u(0,y) &= \sin(2\pi y), && \text{für } 0 < y < 1 && \text{(2c)}\\
u(x,1) &= 0, && \text{für } 0 < x < 1 && \text{(2d)}\\
u(1,y) &= 0, && \text{für } 0 < y < 1 && \text{(2e)}
\end{aligned}
$$

a) Bestimmen Sie, ohne die Lösung zu berechnen $\max\limits_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y)$.

b) Bestimmen Sie die Lösung mittels Trennung der Variablen.

4,5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben ist das Problem

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \partial_{xx} u(x,t) - u(x,t) + \cos(\pi x), && x \in (0,1), t > 0\\
u_x(0,t) &= 0, && t > 0\\
u(1,t) &= 0, && t > 0\\
u(x,0) &= a, && x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

mit einer konstanten Anfangsbedingung $a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen.

(b) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung und den Quellterm in Eigenfunktionen.

(c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

Hinweis: Benutzen Sie:

- $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right)\, dx = \frac{1}{2}$.
- $\int_0^1 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right)\, dx = (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi}$.
- $\int_0^1 \cos(\pi x)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right)\, dx = (-1)^{k+1} \frac{2(1+2k)}{(4k^2+4k-3)\pi}$.

6,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

(a) Berechnen Sie die ersten drei distributionellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller regulären Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ einen Vektorraum bildet.

(c) Zeigen Sie:

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

ist eine Fundamentallösung der Laplacegleichung in $\mathbb{R}^2$:

$$-\Delta\gamma = \delta.$$

4,5 Punkte

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}$
$f(x_k)$	2	4	2	1

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0,..,3$$

erfüllt.

2,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Gesucht ist $u \in C^2((0,1))$ mit

$$-u''(x) + \frac{1}{4}u(x) = f(x), \qquad \text{für } x \in (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = \frac{3}{4}.$$

Die Gleichung soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter mit den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ übergeführt werden.

a) Bestimmen Sie Matrix A und rechte Seite $\mathbf{b}$.

b) Geben Sie Schranken für die Eigenwerte von A an.
Hinweis: Gerschgorin Kreise.

c) Geben Sie Schranken für die L_2-Norm von A und von A^{-1} an.

d) Geben Sie Schranken für die Konditionszahl von A an.

e) Bestimmen Sie die L_∞-Norm von A.

f) Bestimmen Sie die L_1-Norm von A.

5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung lautet $x^* = \frac{1}{69}\begin{bmatrix} 63 \\ 35 \\ 70 \end{bmatrix}$.

(a) Begründen Sie, dass das Gauss-Seidel-Verfahren gegen die Lösung dieses linearen Gleichungssystems konvergiert.

(b) Führen Sie einen Schritt des Gauss-Seidel-Verfahrens mit dem Startwert $x^0 = [1,\ 0,\ 0]^T$ durch.

(c) Wieviele Schritte sind höchstens notwendig, um ausgehend von $x^0 = [1,\ 0,\ 0]^T$ den Fehler im Startwert in der ∞-Norm um den Faktor $R = 10^3$ zu reduzieren?

Hinweis: Sie können folgende Abschätzung verwenden: $log_{10}(2) > \frac{3}{10}$

6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$-\frac{1}{30}u''(x) + u'(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$$
$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine irreduzibel diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten? Welche dieser Aussage ist für Ihre Diskretisierung korrekt?

- (i) A_h ist negativ semidefinit.
- (ii) A_h ist indefinit.
- (iii) A_h ist positiv semidefinit.

Begründen Sie Ihre Aussagen.

Hinweis: WICHTIG: Die Frage nach der Definitheit ist nicht so einfach zu beantworten! Das war ein Fehler in der Klausurstellung!

6,5 Punkte