Prof. Dr. Martin Frank

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2015/16
Klausur am 15.02.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Gegeben sei ein Cauchyproblem mit folgender partiellen Differentialgleichung

$$-y\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + x\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = x\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$$
$$u(x,y) = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad (x,y) \in M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y = 0\}\,.$$

Lösen Sie das Problem mit der Methode der Charakteristiken.

a) Bestimmen Sie das System der Gleichungen der Charakteristiken.

b) Bestimmen Sie damit die Charakteristiken.

c) Bestimmen Sie die Lösung der PDE. Stellen Sie dazu sicher, dass die Rücktransformation wohldefiniert ist.

d) Überprüfen Sie, ob die gefundene Lösung das Cauchyproblem erfüllt.

1,5+1,5+1,5+1 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sei das Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= 0, && \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) && \text{(1a)}\\ \text{mit} \quad u(x,0) &= 0, && \text{für } 0 < x < 1 && \text{(1b)}\\ u(0,y) &= \sin(2\pi y), && \text{für } 0 < y < 1 && \text{(1c)}\\ u(x,1) &= 0, && \text{für } 0 < x < 1 && \text{(1d)}\\ u(1,y) &= 0, && \text{für } 0 < y < 1 && \text{(1e)} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie, ohne die Lösung zu berechnen $\max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y)$.

b) Bestimmen Sie die Lösung mittels Trennung der Variablen.

1+3,5 Punkte

Aufgabe 3.

Betrachten Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$2\partial_{tt}u(x,t) + \partial_{xt}u(x,t) + \alpha\partial_{xx}u(x,t) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+.$$

a) Für welche Werte von α ist die Differentialgleichung
   - hyperbolisch,
   - parabolisch,
   - elliptisch?

b) Setzen Sie $\alpha = -1$ und zeigen Sie, dass für zwei beliebige C^2-Funktionen F und G und geeignete bilineare Funktionen c, d

$$u(x,t) = F(c(x,t)) + G(d(x,t))$$

eine Lösung ist. Bestimmen Sie c und d.

c) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem für $\alpha = -1$ mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sin(x) \quad \text{und} \quad u_x(x,0) = \cos(x) \; .$$

1,5+2+1 Punkte

Aufgabe 4.

(a) Gegeben sei der Operator $A : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ durch

$$(Af)(x) := f(0) + f(1)x + \int_0^x f(t)\,dt \; .$$

Zeigen Sie, dass A linear ist, und berechnen Sie die Operatornorm von A bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, wobei

$$\|u\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |u(x)| \; .$$

(b) Berechnen Sie die distributionelle Ableitung von

$$T_g\phi := (g,\phi)$$

wobei

$$g(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ x^2\,, & 0 \le x < 1\,, \\ 0\,, & x \ge 1\,. \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$S\phi := (h,\phi) + \phi'(0)$$

mit $h(x) = e^x$ eine Distribution ist. Berechnen Sie die distributionelle Ableitung.

Hinweis: Notation $(f,\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$.

2,5+1+2 Punkte

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}$
$f(x_k)$	6	$2+2i$	2	$2-2i$

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f)e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k),\ \text{für } k = 0,..,3$$

erfüllt.

3 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei folgendes Randwertproblem:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{10}u''(x) + u'(x) + u(x) = f,\ \text{für } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Zur Approxmation der Lösung von (2) auf einem äquidistanten Gitter $x_i = ih$ sollen folgende Differenzenquotienten verwendet werden:

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$
$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

a) Leiten Sie das Gleichungssystem für die gegebene Approximation von Problem (2) her.

b) Unter welcher Bedingung handelt es sich bei der Diskretisierungsmatrix um eine L-Matrix?

c) Geben Sie eine Diskretisierung an, die ohne Zusatzbedingung stabil ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

2+1+3 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung lautet $x^* = [1,\ 1,\ 1]^T$.

(a) Begründen Sie, dass das Gauss-Seidel-Verfahren gegen die Lösung dieses linearen Gleichungssystems konvergiert.

(b) Führen Sie einen Schritt des Gauss-Seidel-Verfahrens mit dem Startwert $x^0 = [1,\ 0,\ 0]^T$ durch.

(c) Wieviele Schritte sind höchstens notwendig, um ausgehend von $x^0 = [1,\ 0,\ 0]^T$ den Fehler im Startwert in der ∞-Norm um den Faktor $R = 10^3$ zu reduzieren?

1+3+2 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei folgende PDE:

$$u''(x) = e^{3x} \tag{3}$$

Zur Approximation der Lösung von (3) soll folgender Differenzenstern für die zweite Ableitung verwendet werden:

$$u''(x) \approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die Approximationsordnung des Differenzensterns (4) durch Taylorentwicklung.

b) Bestimmen Sie ein kompaktes Verfahren, so dass die Approximation von Gleichung (3) 4. Ordnung ist. Halten Sie hierbei den Aufwand der Berechnung der rechten Seite so klein wie möglich.

c) Geben Sie ein kompaktes Verfahren an, dessen Approximation von Gleichung (3) 2N-ter Ordnung ist. Begründen Sie Ihre Wahl kurz.
Hinweis: Der Approximationsfehler e des Differenzenensterns (4) bzgl. $u''(x)$ is gegeben als:

$$e(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2h^{2i}}{(2i+2)!} u^{(2(i+1))}$$

1+2+2Punkte