Prof. Dr. Oliver Sander

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2014/15
Klausur am 09.02.2015 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Burgers-Gleichung

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= u_0 \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.

b) Wie verhält sich die Lösung entlang der Charakteristiken?

c) Sei u_0 stetig differenzierbar, und $-\infty < \min u_0' < 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Gleichung zur Zeit

$$T_b = -1/\min u_0' \tag{1}$$

einen Schock entwickelt, bzw. dass die Charakteristiken sich zum Zeitpunkt T_b schneiden.

1,5+1+2 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

mit Lösung $x = (\frac{4}{23}, -\frac{20}{23}, -\frac{27}{23})^T$.

a) Konvergieren das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^3$?

b) Führen Sie einen Schritt mit dem Gauß-Seidel-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (1,0,0)^T$.

c) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen zur Anwendung des CG-Verfahrens gegeben sind und führen Sie einen Schritt mit dem CG-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (0,-1,-1)^T$.

d) Welches Ergebnis erhält man nach drei Schritten mit dem CG-Verfahren?

1+1+2+1 Punkte

Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie die ersten drei distributionellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller regulären Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ einen Vektorraum bildet.

(c) Zeigen Sie:

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto -\frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

ist eine Fundamentallösung der Laplacegleichung in $\mathbb{R}^2$:

$$-\Delta\gamma = \delta.$$

1,5+1+1,5 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 10u'(x) + u(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten?

2+1+2 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

auf dem Einheitsquadrat.

a) Zeigen Sie, dass $e^{\nu,\mu}(x,y) = \sin(\nu\pi x)\sin(\mu\pi y), \quad \nu,\mu \in \mathbb{N}$ Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf dem Einheitsquadrat sind und bestimmen Sie die Eigenwerte.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren paarweise orthogonal bezüglich eines passenden Skalarprodukts sind.

c) Diskretisieren Sie die Gleichung mit zentralen Differenzen auf einem Gitter der Weite h und wählen Sie die Eigenfunktionen als Ansatz. Vereinfachen Sie den Ausdruck soweit wie möglich und bestimmen Sie die Eigenvektoren der Systemmatrix.

d) Berechnen Sie die entsprechenden Eigenwerte, und folgern Sie, dass sich die Kondition der Matrix wie $O(1/h^2)$ verhält.

1+1+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 6.

a) Zeigen Sie, dass für $b \in \mathbb{R}$

$$E(x) := e^{-bx} H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit der Heaviside-Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung für den Differentialoperator L mit $Lu := \frac{d}{dx}u + b\,u$ ist.

b) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $Lu = f,\ x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ mit Hilfe der Fundamentallösung an.

2+1 Punkte

Aufgabe 7.
Gegeben sei das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
-u''(x) &= 2x^2 + 6x, \quad x \in (-1,1),\\
u(-1) &= 0,\\
u(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

und der Finite-Elemente-Raum, der durch die Basisfunktionen

$$\phi_1(x) = x^2 - 1, \quad \phi_2(x) = x(1 - x^2)$$

aufgespannt wird.

a) Diskretisieren Sie die Gleichung in diesem Raum. Wie lautet das dazugehörige Gleichungssystem?

b) Wie lautet die Lösung dieses linearen Gleichungssystems und die dazugehörige Finite-Elemente-Funktion?

3+0,5 Punkte

Aufgabe 8.
Gegeben sei das Problem

$$
\begin{aligned}
\partial_{tt}u(x,t) &= \partial_{xx}u(x,t) + x, && x \in (0,2\pi), t > 0\\
u(0,t) &= 0, && t > 0\\
u(2\pi,t) &= 0, && t > 0\\
u(x,0) &= x(2\pi - x), && x \in (0,2\pi)\\
u_t(x,0) &= 0, && x \in (0,2\pi)
\end{aligned}
$$

mit einem konstantem Quellterm $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen von ∂_{xx}.

b) Entwickeln Sie den Quellterm und die Anfangsbedingung in diesen Eigenfunktionen.

c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

Hinweis: Die Gleichung $y''(x) = -cy(x) + b$ besitzt die allg. Lösung

$$y(x) = \frac{b}{c} + k_1 \sin(\sqrt{c}x) + k_2 \cos(\sqrt{c}x), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

1+2+3,5 Punkte