Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen IV (CES)

10.02.2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte (inkl. Bonuspunkte).
- Die Klausureinsicht findet am 27.02.2014 von 10:00–11:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Ein Termin für eine mündliche Nachprüfung ist dort zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	4	6	5	5	4	3	6	7	40
Ihre Punkte									

Klausur ____ + Bonus ____ = Gesamt ____

Note: ____

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	1	0	1	1

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f)e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0,\ldots,3$ erfüllt.

(b) Bilden Sie den Realteil von T_4. Interpoliert der Realteil die Daten?

3+1 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$-u''(x) + 10u'(x) + u(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$
$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Unter welchen Bedingungen ist A_h eine M-Matrix?

(c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingungen die M-Matrix-Eigenschaft zu erhalten?

2+2+2 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die ∞-Norm der Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens für die Matrix A.

b) Überprüfen Sie, ob das Jacobi-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für alle Startvektoren $x^0 \in \mathbb{R}^3$ durchführbar ist und konvergiert.

c) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $x^0 = (0, 1, 0)^T$ durch.

1.5+2+1.5 Punkte

Aufgabe 4.

Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x) &= f(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0) &= u(1) = 0 \\ u'(0) &= u'(1) = 0 \end{aligned}$$

für ein $u \in C^6(]0,1[)$ und $f \in C^0(]0,1[)$ soll auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ und Punkten $x_i = ih$ mit Hilfe eines 5-Punkt-Verfahrens der Form

$$\frac{1}{h^4}(\alpha u_{i-2} + \beta u_{i+1} + \gamma u_i + \beta u_{i-1} + \alpha u_{i+2}) = f_i$$

approximiert werden.

a) Wie müssen die Koeffizienten α, β, γ gewählt werden, damit das Verfahren konsistent von Ordnung 2 ist?

b) Stellen Sie das entsprechende lineare Gleichungssystem für die Werte u_i, $i = 1, \ldots, n-1$ auf. Setzen Sie dabei alle Randterme $u_{-1}, u_0, u_n, u_{n+1}$ auf 0.

c) Ist die Matrix im linearen Gleichungssystem eine M-Matrix?

3+1+1 Punkte

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Cauchy-Problems für die eindimensionale Wellengleichung

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0, && \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R} \\
u(0, x) &= x^2 e^{3x} && \text{für } x \in \mathbb{R} \\
u_t(0, x) &= -(x - 3)^2 && \text{für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

4 Punkte

Aufgabe 6.

a) Zeigen Sie, dass für $b \in \mathbb{R}$

$$E(x) := e^{-bx} H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit der Heaviside-Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung für den Differentialoperator L mit $Lu := \frac{d}{dx} u + b\, u$ ist.

b) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $Lu = f,\ x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ mit Hilfe der Fundamentallösung an.

2+1 Punkte

Aufgabe 7.
Lösen Sie das folgende Randwertproblem.

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 && \text{in } \Omega = (0,1)^2,\\
u(0,y) &= 0, && y \in (0,1),\\
u(x,0) &= 0, && x \in (0,1),\\
u(x,1) &= 0, && x \in (0,1),\\
u_x(1,y) &= \sin(2\pi y), && y \in (0,1).
\end{aligned}
$$

6 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_0,\ x \in (0, L),\ L > 0,\ t > 0 \\
u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\
u(x, 0) &= 0
\end{aligned}
$$

mit konstantem Quellterm $q_0 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

a) die Lösung $u(x, t)$.

b) die stationäre Lösung $\lim_{t\to\infty} u = u_\infty(x)$.

5+2 Punkte

Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Martin Frank

Beanstandungen der Klausurkorrektur
Mathematische Grundlagen IV (CES) WS 2013/14
Klausur vom 10.02.2014

Name, Vorname	Matrikelnummer

Aufgabe	Erklärung der Beanstandungen

Notenskala und Statistik der Klausur zu Mathematische Grundlagen IV (CES) WS 2013/14 vom 10.02.2014

Note	Punkte	Statistik
1.0	38 – 40.0	
1.3	36 – 37.5	
1.7	34 – 35.5	
2.0	32 – 33.5	
2.3	30 – 31.5	
2.7	28 – 29.5	1
3.0	26 – 27.5	
3.3	24 – 25.5	1
3.7	22 – 23.5	
4.0	20 – 21.5	2
5.0	0 – 19.5	2

Tabelle 1: Notenskala

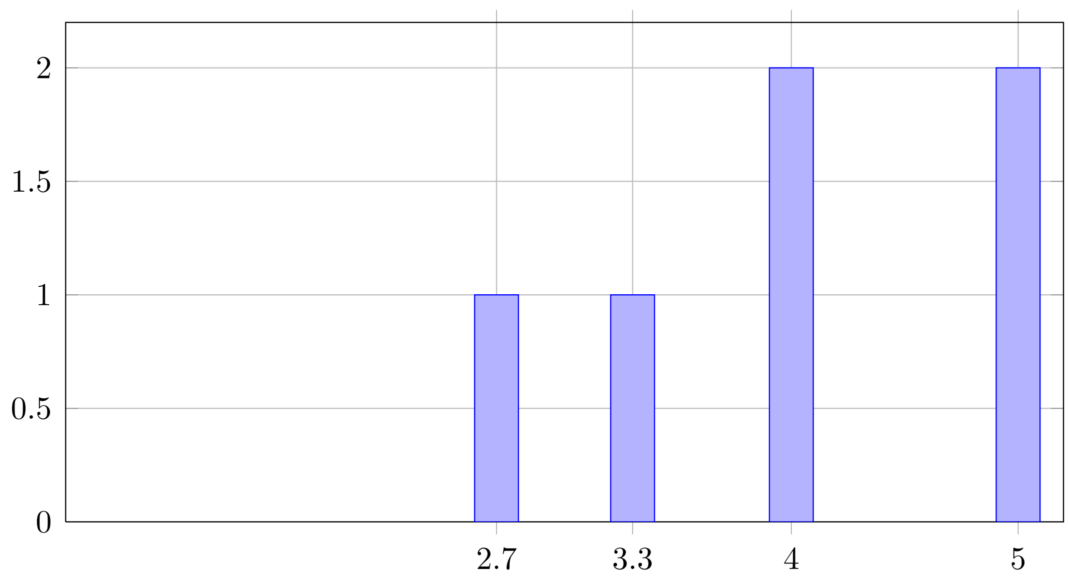

Tabelle 2: Notenstatistik