Aufgabe 1. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2 = 2x, \quad \text{für } x \in (-1, 1),$$

mit den Randbedingungen

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Es sei eine äquidistante Diskretisierung des Rechengebietes durch $x_i = i \cdot h$, $i = 0, \ldots, N$ mit der Schrittweite $h = \frac{1}{N}$ gegeben. Ferner sei $y_i = y(x_i)$.

(a) Leiten Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung eine Approximation von $y''(x)$ und $y'(x)$ in Form von zentralen Finiten Differenzen her. Was lässt sich über die Ordnung der Approximation sagen?
Tipp: Betrachten Sie $y(x+h)$ und $y(x-h)$!

(b) Diskretisieren Sie das Randwertproblem mittels der zentralen Finiten Differenzen aus (a). Geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem ($A_h y_h = b_h$) mit $y_h = (y_0, \ldots, y_N)^T$ an.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 2. Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	6	0	2	0

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \dots, 3$.

3 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-(x^2 u'(x))' + u(x) = x + 1 \qquad x \in (0,1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

a) Überführen Sie diese Differentialgleichung unter Verwendung von Testfunktionen $v \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $v(0) = v(1) = 0$ in eine schwache Form. Stellen Sie sicher, dass danach nur erste Ableitungen von u vorkommen.

b) Für das Finite Elemente Galerkin Verfahren des obigen Randwertproblems sei $h = \frac{1}{N+1}$, $x_n = nh$ für $n = 1, \ldots, N$. Dabei seien die Testfunktionen gerade die folgenden "Hut"-Funktionen:

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} 0 & x < x_{n-1} \\ \frac{1}{h}(x - x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 - \frac{1}{h}(x - x_n) & x_n \leq x < x_{n+1} \\ 0 & x_{n+1} \leq x \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots, N\,.$$

Ferner sei der Ansatz für die Lösung: $\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \tilde{v}_n(x)$.
Berechnen Sie das Gleichungssystem für das Finite Elemente Galerkin Verfahren. Drücken Sie alle Koeffizienten des linearen Gleichungssystems als eine Funktion aus, die nur von der Schrittweite h und der Zeilennummer n abhängt.

1 + 4 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $x = (1, 2)^T$.

(a) Überprüfen Sie die Konvergenz des SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter $\omega = 1.5$ sowie des Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens.

(b) Führen Sie jeweils einen Schritt des SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter $\omega = 1.5$ sowie des Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x^0 = (1, 1)^T$ durch.

3 + 3 Punkte

Aufgabe 5. (a) Zeigen Sie, dass

$$\partial_t u + \partial_x u + 2\partial_x v = 0$$
$$\partial_t v + \alpha\partial_x u - \partial_x v = 0$$

genau dann ein hyperbolisches System ist, wenn $\alpha > -\frac{1}{2}$ gilt.

(b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem für $\alpha = \frac{3}{2}$ mit den Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = cos(x)$$
$$v_0(x) = sin(x)$$

(c) Welche Bedeutung haben die Eigenwerte der Jacobi-Matrix des hyperbolischen Systems in der Lösung?

1.5+2.5+0.5 Punkte

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Lösung des Randwertproblems

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0 && 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\
u(x,0) &= 0, && 0 < x < 1, \\
u(0,y) &= 0, && 0 < y < 1, \\
u(x,1) &= 0, && 0 < x < 1, \\
u(1,y) &= \sin(\pi y), && 0 < y < 1,
\end{aligned}
$$

mit dem Ansatz der Separation der Variablen. 4.5 Punkte

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der folgenden Distributionen. Dabei ist $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(a) $T_f\phi := (f, \phi)$ wobei $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 + x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$.

(b) $T_g\phi := -\phi(-1) + 2\phi(0) - \phi(1)$.

2+2 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben ist das Problem

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \partial_{xx} u(x,t) + \sin(\pi x), && x \in (0,1), t > 0 \\
u(0,t) &= 0, && t > 0 \\
u(1,t) &= 0, && t > 0 \\
u(x,0) &= a, && x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

mit einer konstanten Anfangsbedingung $a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen.

(b) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung und den Quellterm in Eigenfunktionen.

(c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

1+1+4 Punkte