Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine Lösung der Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + x u_x(x,t) &= 0, && t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= \sin(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.5 Punkte

Aufgabe 2. Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= 4u_{xx}(x,t), && t>0, \quad 0<x<\pi \\
u(0,t) &= 0, && t>0, \\
u_x(\pi,t) &= 0, && t>0, \\
u(x,0) &= 3\sin\left(\frac{5}{2}x\right), && 0<x<\pi.
\end{aligned}
$$

4.5 Punkte

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Eine Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

ist

$$G(x) = -\frac{1}{2}|x|,$$

d.h. es gilt im distributionellen Sinne

$$-\frac{d^2}{dx^2}G = \delta.$$

2 Punkte

Aufgabe 4. Es bezeichne
$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx$$
die Fouriertransformierte einer Funktion $u \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie
$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Hinweis: Benutzen Sie
$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\hat{v}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x) v(x) dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte von
$$u(x) = e^{-|x|}$$
durch
$$\hat{u}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$$
gegeben ist.

(c) Benutzen Sie (a) und (b) um
$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+\xi^2)^2} d\xi$$
zu berechnen.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 5. Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	3	0	-1	0

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \dots, 3$.

3 Punkte

Aufgabe 6. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) - \frac{1}{2}\alpha^2 u(x) = 3\alpha x, \quad \text{für } x \in (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Diskretisieren Sie den Definitionsbereich durch N Punkte

$$x_n = nh\,, \qquad h = \frac{1}{N+1}\,, \qquad n = 1, \dots, N\,,$$

unter Verwendung der Finiten Differenzen Methode

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}\,.$$

(a) Geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem ($A_h u_h = b_h$) an.

(b) Geben Sie begründet alle Werte α an, für die das diskrete Problem bei beliebiger Auflösung genau eine Lösung hat!

Hinweis: Die Eigenwerte der $N \times N$ Tridiagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{lauten } \lambda_n = 2\cos\left(\tfrac{n\pi}{N+1}\right), \qquad \text{n=1,...,N.}$$

1 + 2 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $x = (1, 2)^T$.

(a) Überprüfen Sie die Konvergenz des Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter $\omega = 1.5$.

(b) Führen Sie jeweils einen Schritt des Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter $\omega = 1.5$ mit dem Startvektor $x^0 = (1, 1)^T$ durch.

3 + 3 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-x^2u''(x) - 2xu'(x) + u(x) = f(x) \qquad x \in (0,1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

a) Überführen Sie diese Differentialgleichung unter Verwendung von Testfunktionen $v \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $v(0) = v(1) = 0$ in eine schwache Form. Stellen Sie sicher, dass danach nur erste Ableitungen von u vorkommen.

b) Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-(a(x)u')' + q(x)u(x) = f(x) \qquad x \in (0,1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

mit $a(x) = x^2$, $q(x) = 1$ und $f(x) = 1$. Für das Finite Elemente Galerkin Verfahren sei $h = \frac{1}{N+1}$, $x_n = nh$ für $n = 1,\ldots,N$. Dabei seien die Testfunktionen gerade die folgenden "Hut"-Funktionen:

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} 0 & x < x_{n-1} \\ \frac{1}{h}(x - x_{n-1}) & x_{n-1} \le x < x_n \\ 1 - \frac{1}{h}(x - x_n) & x_n \le x < x_{n+1} \\ 0 & x_{n+1} \le x \end{cases} \qquad n = 1,2,3\ldots,N\,.$$

Ferner sei der Ansatz für die Lösung: $\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \tilde{v}_n(x)$.
Berechnen Sie das Gleichungssystem für das Finite Elemente Galerkin Verfahren. Drücken Sie alle Koeffizienten des linearen Gleichungssystems als eine Funktion aus, die nur von der Schrittweite h und der Zeilennummer n abhängt.

1+3 Punkte