**Aufgabe 1.** Gegeben sei die Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_x(x,y) + y u_y(x,y) &= 0, & (x,y) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0,y) &= \cos(y), & y &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie mithilfe der Charakteristikenmethode einen Kandidaten $u$ für die Lösung dieser Transportgleichung.

(b) Verifizieren Sie, dass Ihr Kandidat $u$ aus Teil (a) die Transportgleichung erfüllt.

3.5 + 0.5 Punkte

**Aufgabe 2.** Lösen Sie das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 && \text{in } \Omega = (0,1)^2,\\
u(0,y) &= 0, && y \in (0,1),\\
u_x(1,y) &= \cos(2\pi y), && y \in (0,1),\\
u_y(x,0) &= 0, && x \in (0,1),\\
u_y(x,1) &= 0, && x \in (0,1).
\end{aligned}
$$

4 Punkte

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender Funktionen:

(a) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(c) $f(x) = e^{-x^2/2}$

(d) $f(x) = H(1-|x|)$. Dabei ist

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion.

1+1+1+1 Punkte

**Aufgabe 4.** Wir betrachten Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ mit

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Sei $u$ eine harmonische Funktion in Polarkoordinaten, d.h. $u = u(r, \varphi)$, in der Kreisscheibe

$$B = \{(r, \varphi) : r < 2\}$$

mit $u(2, \varphi) = 3\sin\varphi + 1$.

(a) Bestimmen Sie $u(0, 0)$.

(b) Bestimmen Sie $\max\limits_{(r,\varphi)\in\bar{B}} u(r, \varphi)$.

2 + 2 Punkte

**Aufgabe 5.** Bestimmen Sie zu den Daten

| $x_k$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_k)$ | 2 | 0 | -2 | 0 |

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \ldots, 3$.

3 Punkte

**Aufgabe 6.** Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$-u''(x) - 5u'(x) = 3, \quad \text{für } x \in (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = 1.$$

Man kann sogar annehmen, dass $u \in C^4(0,1)$.

Dieses Problem soll mithilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite $h$ und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden.

(a) Diskretisieren Sie das Problem so, dass $A_h$ eine M-Matrix ist und weisen Sie diese Eigenschaft nach. Geben Sie auch den Vektor $b_h$ an.

(b) Begründen Sie, dass das in (a) konstruierte Verfahren für $h \to 0$ gegen die analytische Lösung des Konvektions–Diffusionsproblems konvergiert.

3.5 + 1.5 Punkte

**Aufgabe 7.** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie jeweils einen Schritt des Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter $\omega = 1.5$ mit dem Startvektor $x^0 = (1, 1)^T$ durch.

(b) Zeigen Sie die Konvergenz des SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter $\omega = 1.5$.

3 + 1 Punkte

**Aufgabe 8.** Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x) \qquad x \in (a, b) \\ u(a) = 0 &= u(b) \end{aligned}$$

für ein $u \in C^4((a, b))$ und $f \in C^2((a, b))$ soll auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite $h$ mithilfe eines kompakten Verfahrens gegeben durch

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i &= \frac{1}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1}) \\ u_0 = 0 &= u_{n+1} \end{aligned}$$

approximiert werden.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem der Form $Au = b$ für $u = (u_1, \ldots, u_n)$ auf.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren konsistent ist von der Ordnung 4.

1.5 + 2.5 Punkte