Aufgabe 1. Gegeben sei die Transportgleichung

$$\begin{cases} \langle \nabla u(x,\, y),\, (x,\, x^2) \rangle &= 0, & (x,\, y) \in \Omega := (1,\, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(1,\, y) &= \arctan(y), & (0,\, y) \in \partial\Omega = \{\, 1 \,\} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Geben Sie die charakteristischen Grundkurven für diese Transportgleichung an.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode einen Kandidaten u für die Lösung dieser Transportgleichung.

c) Verifizieren Sie, dass Ihr Kandidat u aus Teil b) die Transportgleichung erfüllt.

$1.5 + 1.5 + 1.5$ Punkte

Aufgabe 2. Für $t > 0$ sei $f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_t(x) = e^{-t|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}_t$.

2.5 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei die Potentialgleichung

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= e^{-\|x\|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \\ \lim\limits_{\|x\|\to\infty} u(x) &= 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass dieses System genau eine Lösung u besitzt.

b) Berechnen Sie $u(0)$.

$2+2$ Punkte

Aufgabe 4. Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) &= 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(t,0) &= p(t), \qquad t > 0, \\ \nabla u(t,0) &= 0, \qquad t > 0. \end{cases}$$

mit einem Polynom p vom Grad $m \geq 0$. Ermitteln Sie eine Lösung u dieser Gleichung.

Hinweis: Verwenden Sie für u einen Potenzreihenansatz im Ort mit zeitabhängigen Koeffizienten.

4 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben sei die Potentialgleichung

$$\begin{cases} -u''(x) &= 6x + 2, \qquad x \in (-1,\, 1) \\ u(-1) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{cases}$$

Nehmen Sie eine Finite-Elemente-Diskretisierung dieses Systems zur Basis $\{\, \phi_1,\, \phi_2 \,\}$ vor, wobei

$$\phi_1(x) = 1 - x^2, \qquad \phi_2(x) = (1 - x^2)x, \qquad x \in (-1,\, 1),$$

und bestimmen Sie so eine Approximation $u_h = u_1\phi_1 + u_2\phi_2$ der Lösung des Systems.

4 Punkte

Aufgabe 6. Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) &= f(t,x), & t \in (0,T),\ x \in (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0, & t \in (0,T) \\ u(0,x) &= u_0(x), & x \in (0,1) \end{cases}$$

mit $f \in C([0,T] \times [0,1], \mathbb{R})$ und $u_0 \in C^2([0,1], \mathbb{R})$.

a) Nehmen Sie eine Finite-Differenzen-Diskretisierung im Ort vor, wobei das Intervall $[0,1]$ äquidistant in 4 Teilintervalle zerlegt werden soll, und stellen Sie die resultierende gewöhnliche Differentialgleichung für die ortsdiskrete Funktion $u_h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ in der Form

$$u_h'(t) + A_h u_h(t) = f_h(t), \quad t \in (0,T), \qquad u_h(0) = u_h^0 \tag{$*$}$$

mit $A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f_h \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ und $u_h^0 \in \mathbb{R}^n$ auf.

b) Geben Sie das explizite und das implizite Eulerverfahren zur Approximation der Lösung der ortsdiskreten Gleichung $(*)$ an und diskutieren Sie jeweils die Vor- und die Nachteile dieser beiden Verfahren für den speziellen Fall der sich aus Teil a) ergebenden Daten A_h, f_h und u_h^0.

4 + 1 Punkte

Aufgabe 7. Führen Sie jeweils *drei* Iterationsschritte des Vorwärts- und des Rückwärts-Gauss-Seidel-Verfahrens zur Approximation der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch. Wählen Sie dabei als Startwert jeweils $x^0 = 0$.

3.5 Punkte

Aufgabe 8. Seien $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und sei

$$U = \operatorname{span}\{\, p_1, p_2, \dots, p_m \,\}.$$

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle - \langle x, b \rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit ist und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, das Minimum

$$\min_{x\in U} f(x).$$

2.5 Punkte