



Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2025
Klausur | Donnerstag, 28.08.2024

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, 11.09.2024 von 10:00 – 11:30 Uhr im Seminarraum 1090|328, Rogowski Gebäude statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: _ _ _ _ _

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	5	6	3.5	4.5	3	8	11	9	50
Ihre Punkte									

Klausur Bonus Gesamt
 + =

Note:

Aufgabe 1.

Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1)$$

- a) Klassifizieren Sie die PDE (1).
- b) Geben Sie die Charakteristiken in der (t, x) -Ebene an.
- c) Skizzieren Sie die Charakteristiken in der (t, x) -Ebene.
- d) Lösen Sie das folgende Cauchy-Problem mit $c = 2$:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad u(0, x) = e^{-x^2}, \quad u_t(0, x) = \sin(x).$$

1.5 + 1.5 + 0.5 + 1.5 = 5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass

$$u(x, y) = (A \sin(\alpha y) + B \cos(\alpha y)) e^{\alpha x}$$

mit $A, B, \alpha \in \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Skizzieren Sie das Gebiet

$$\mathbb{R}^+ \times [0, 1] =: \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Kennzeichnen Sie den (abgeschlossenen) Rand $\partial\Omega$!

c) Geben Sie mit Hilfe von (a) die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega \\ u(x, y = 0) = u(x, y = 1) = 0 \\ u(0, y) = 3 \sin(3\pi y) \end{cases}$$

an.

Hinweis:

- Die Lösung ist beschränkt $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) < \infty$
- Der Sinus ist eine ungerade Funktion, also $\sin(-x) = -\sin(x)$.

1.5 + 1 + 3.5 = 6 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Seien X und (Y) Banachräume mit den Normen $\|\cdot\|_X$ bzw $\|\cdot\|_Y$ und $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator.

a) Zeigen Sie: T ist genau dann stetig, wenn T beschränkt ist, d.h.:

Es existiert ein $M > 0$, s.d. $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ für alle $x \in X$

$\Leftrightarrow$ für alle $x_0 \in X$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon$.

b) Zeigen Sie, dass ein kompakter Operator T , d.h.

jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ hat eine konvergente Teilfolge $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset Y$ auch beschränkt ist.

2.5 + 1 = 3.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

- (a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung $T'_f \phi$ der folgenden Distribution:

$$T_f \phi := (f, \phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

wobei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ x - 1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ ist das Lebesgue/ L^2 -Skalarprodukt auf dem Ganzraum $\mathbb{R}$.

- (b) Zeigen Sie, dass partielle Ableitungen von Distributionen vertauscht werden können, analog zu klassischen Funktionen: $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} T, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} T, \phi \right\rangle.$$

- (c) Finden Sie eine Lösung U der Gleichung

$$-\Delta U = \frac{\partial}{\partial x_1} \delta, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

wobei δ die Dirac-Delta Distribution bedeutet.

Hinweis: Sie können U in Abhängigkeit der Fundamentallösung G

$$-\Delta G = \delta$$

angeben.

2 + 1.5 + 1 = 4.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

k	x_k	y_k
0	0	4
1	$\pi/2$	2
2	π	1
3	$3\pi/2$	2

ein *reelles* trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(y; x) = \sum_{k=0}^3 \hat{d}_k(y) \cos(kx),$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung $T_4(y; x_k) = y_k$ für $k = 0, 1, 2, 3$ erfüllt.**3 Punkte**

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

- a) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f wie folgt

$$f''(x) \approx \frac{2}{h_1 + h_2} \left(\frac{f(x + h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x - h_1)}{h_1} \right), \quad h_1, h_2 > 0$$

Bestimmen Sie die Approximationsordnung für $h_1 = h_2$ und $h_1 \neq h_2$.

- b) Die erste Ableitung einer Funktion u an der Stelle ξ soll mit Hilfe einer Differenzenformel, die die Funktionsauswertungen von u an den Stellen ξ , $\xi + h_1$ und $\xi + h_1 + h_2$ benutzt, approximiert werden, d.h.

$$u'(\xi) = a u(\xi) + b u(\xi + h_1) + c u(\xi + h_1 + h_2) + R(u, h),$$

wobei $h_1, h_2, > 0$, $h = \max(h_1, h_2)$ und $R(u, h) = \mathcal{O}(h^p)$ der Fehler der Differenzenformel ist. Bestimmen Sie a, b, c so dass p maximal wird. Wie groß ist dieses?

3 + 5 = 8 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^4(0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 7u'(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

- (a) Bestimmen Sie A_h und b_h .
- (b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h (schwach) diagonaldominant ist.
- (c) Geben Sie eine mögliche Finite Differenzen Diskretisierung für die gegebene Differentialgleichung an, sodass die resultierende Matrix A_h **für alle** $h > 0$ strikt diagonal dominant ist.

Hinweis: Eine Matrix ist strikt diagonaldominant, wenn sie schwach diag-dom. ist und für mindestens eine Zeile i gilt:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

3 + 5.5 + 2.5 = 11 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das Jacobi-Verfahren für beliebige Startvektoren $x^0 \in \mathbb{R}^3$?

Sei nun $\alpha = 3$ gegeben. Dann ist $x^* = \frac{1}{21}(5, -15, -19)^T$ eine Lösung des LGS.

- b) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen zur Anwendung des CG-Verfahrens gegeben sind.
- c) Führen Sie einen Schritt mit dem CG-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor

$$x^0 = (0, -1, -1)^T$$

- d) Welches Ergebnis erhält man nach drei Schritten mit dem CG-Verfahren?

3 + 2 + 3.5 + 0.5 = 9 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Viel Erfolg!