Dr. Andrés Rueda-Ramírez
Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Tamme Claus
Dr. Satyvir Singh

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2024
Klausur | 30.08.2024

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 16.09.2024 von 09:00-12:00 Uhr im klPhys 1090|334 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	8.5	8.5	5	8	6	9	8	7	60
Ihre Punkte									

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.

a) Gegeben sei die dreidimensionale partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2xu_{xy} + 2yu_{yz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z).$$

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Differentialgleichung *elliptisch*, *hyperbolisch* bzw. *parabolisch* ist.

> **Hinweis:** Stellen Sie die Matrix der Koeffizienten vor den zweiten Ableitungen auf und untersuchen Sie deren Eigenwerte.

b) Wann ist das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x \left(u^2/2 + v\right) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_x \left(uv + u\right) &= 0, \end{aligned}$$

hyperbolisch?

8.5 Punkte

Aufgabe 2.

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 && \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\
u(0,y) &= 0, && y \in (0,1), \\
u_x(1,y) &= \sin(2\pi y), && y \in (0,1), \\
u(x,0) = u(x,1) &= 0, && x \in (0,1)
\end{aligned}$$

mithilfe eines Separationsansatzes $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Hinweis:

- Wählen Sie dabei eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ positiv ist.
- Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ansätze equivalent.

$$\tilde{C}_1 \exp^{i\lambda x} + \tilde{C}_2 \exp^{-i\lambda x} = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

8.5 Punkte

Aufgabe 3.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) - u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = u_0(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\left(\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\right)(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2a}\right).$$

a) Es sei

$$\widehat{u}(t,\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(t,x) \exp(-ix\xi)\, dx$$

die Fouriertransformierte von $u(t,x)$ bzgl. x. Rechnen Sie nach, dass

$$\partial_t \widehat{u} = (-1-\xi^2)\widehat{u}.$$

b) Bestimmen Sie die Fouriertransformation der Anfangsbedingung

$$\hat{u}_0(\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi).$$

c) Bestimmen Sie eine Lösung $\hat{u}(t,\xi)$ der fouriertransformierten Gleichung.

d) Bestimmen Sie eine Lösung $u(t,x)$ des Anfangswertproblems durch Rücktransformation.

5 Punkte

Aufgabe 4.

Berechnen Sie die distributionelle Ableitung folgender Distributionen:

a) $T_{H_{x_0}}$, wobei mit Testfunktion ϕ gilt $T_{H_{x_0}}(\phi) = \langle H_{x_0}, \phi \rangle$ und

$$H_{x_0}(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x < x_0, \\ 1, & \text{für } x \geq x_0, \end{cases}$$

die verschobene Heaviside-Funktion ist.

b) T_{sgn}, wobei mit Testfuktion ϕ gilt $T_{\mathsf{sgn}}(\phi) = \langle \mathsf{sgn}, \phi \rangle$ und

$$\mathsf{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ -1, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

die Vorzeichenfunktion ist.

c) T_f eine reguläre Distribution mit der Funktion

$$f(x) := (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} (1 - x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie von dieser Distribution auch die **zweite** Ableitung.

8 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Seien A und B zwei ganze Zahlen mit jeweils n Ziffern a_i und b_i, die folgendermaßen dargestellt werden:

$$A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0,$$
$$B = b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation $C = A \times B$ als zyklische Faltung der Ziffernfolgen $\underline{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ und $\underline{b} = \{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$ interpretiert werden kann. Insbesondere sind die Ziffern von C gegeben durch

$$c_k = (2n-1) \cdot (\underline{a} * \underline{b})_k.$$

> **Hinweis:** Schreiben Sie A und B als Polynome, wobei die Koeffizienten die Ziffern der Zahlen darstellen und vervollständigen Sie die Polynome durch Hinzufügen von Ziffern $a_j = b_j = 0$ für $n \leq j \leq m := 2n-2$.

b) Implementieren Sie eine Routine, um die Multiplikation von zwei großen Zahlen mithilfe der zyklischen Faltung durchzuführen. Verwenden Sie dafür die diskrete Fourier-Transformation (DFT) und deren inverse Transformation, die effizient mit dem Algorithmus der schnellen Fourier-Transformation berechnet werden können.

Verwenden Sie die folgenden Routinen:

`y_hat_vec = fft(y_vec)` für die Vorwärtstransformation und

`y_vec = ifft(y_hat_vec)` für die Rücktransformation,

wobei `y_vec` dem Vektor $\underline{y} = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$ und `y_hat_vec` dem Vektor $\underline{\hat{y}} = \{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{N-1}\}$ entspricht. Die diskrete Fourier-Transformation und die inverse Transformation sind definiert durch:

$$\hat{y}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-ijk\frac{2\pi}{N}}, \qquad y_k = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{y}_j e^{ijk\frac{2\pi}{N}},$$

wobei N die Länge der Vektoren ist und i die imaginäre Einheit darstellt.

Vervollständigen Sie die Routine `c_vec = Multiplication(a_vec, b_vec, m)`, wobei die Input-Vektoren `a_vec` und `b_vec` schon mit den Ziffern $a_j = b_j = 0$ für $n \leq j \leq m := 2n-2$ vervollständigt wurden. Sie können jede beliebige Programmiersprache oder Pseudo-Code verwenden. Die Syntax wird nicht bewertet.

c) Warum ist die Implementierung mit `fft` und `ifft` effizient?

6 Punkte

```
def c_vec = Multiplication(a_vec, b_vec, m):
  # Initialisiere c_vec
  c_vec = zeros(m)
  # Berechne a*b mit zyklischer Faltung
```

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

a) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für hinreichend glattes f:

$$\frac{2}{h_1+h_2}\left(\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}-\frac{f(x)-f(x-h_1)}{h_1}\right)$$

Bestimmen Sie die Approximationsordnung.

b) Die erste Ableitung einer Funktion $u(x)$ an der Stelle x soll mit Hilfe einer Differenzenformel, die die Funktionsauswertungen von u an den Stellen x, $x+h_1$ und $x+h_1+h_2$ benutzt, approximiert werden, d.h.

$$u'(x) = au(x) + bu(x+h_1) + cu(x+h_1+h_2) + R(u,h),$$

wobei $h = \max(h_1,h_2)$ und $R(u,h) = \mathcal{O}(h^p)$ der Fehler der Differenzenformel ist. Bestimmen Sie a, b, c so, dass p maximal wird. Wie groß ist dieses?

Hinweis: Entwickeln Sie $u(x)$ um die Stelle x.

9 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusions-Problem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 10u'(x) + u(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten (zentrale Differenzen)

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

b) Geben Sie <u>eine</u> mögliche Schrittweite h an, unter der A_h (streng) diagonaldominant ist.

c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine (streng) diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten?

8 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Wir betrachten das Jacobi-Verfahren um iterativ ein Gleichungssystem $Ax^* = b$ zu lösen.

a) Geben Sie die Iterationsmatrix G des Jacobi-Verfahrens für eine allgemeine Matrix $A = D + L + R$ an, sodass
$$x^{k+1} = Gx^k + D^{-1}b.$$

Sei nun eine Matrix M gegeben

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

b) Berechnen Sie die Iterationsmatrix G_M für M.

c) Zeigen Sie, dass der Spektralradius der Iterationsmatrix $\rho(G_M) = 0$ ist.

d) Für den Fehler $e^k (= x^k - x^*)$ im Jacobiverfahren gilt
$$e^{k+1} = Ge^k \quad k \geq 0.$$

Sei ein Anfangsfehler $e^0 := (1, \dots, 1)^T$ gegeben. Zeigen Sie für G_M:

i) $||e^{k+1}||_\infty = ||G_M e^k||_\infty = ||e^k||_\infty = 1$ für $0 \leq k \leq n-1$,

ii) $||e^k||_\infty = 0$ für $k \geq n$.

7 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.: