Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Michael Schlottke-Lakemper
Daniel Döhring
Tuan Vo
Donat Weniger

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2023
Klausur | 25.08.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 18.09.2023 von 10:00–11:00 Uhr im 1090|334 (klPhys, Rogowski-Gebäude, Schinkelstraße 02, 52062 Aachen) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	5	9	5	4	7	8	6	50
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

a) Entscheiden Sie, ob folgende Differentialgleichungen zweiter Ordnung *elliptisch*, *hyperbolisch* oder *parabolisch* sind. Begründen Sie ihre Antwort.

(i) $\left(c_0^2 - u_x^2\right)\, u_{xx} - 2\, u_x u_y u_{xy} + \left(c_0^2 - u_y^2\right)\, u_{yy} = 0,\quad$ mit $c_0 \in \mathbb{R}$ und $c_0 > 0$.

(ii) $y\, u_{xx} + u_{yy} = 0$.

b) Gegeben ist das PDE-System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + 3\,\partial_{x_1} u_2 + 2\,\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_2 + \partial_{x_1} u_2 + 3\,\partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_3 + 2\,\partial_{x_1} u_2 + 3\,\partial_{x_1} u_3 + 2\,\partial_{x_2} u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das System in der Form

$$\partial_t \boldsymbol{U} + \nabla \cdot F(\boldsymbol{U}) = \partial_t \boldsymbol{U} + \mathrm{div} F(\boldsymbol{U}) = 0, \quad \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^3$$

geschrieben werden kann, und überprüfen Sie, ob das System *hyperbolisch* ist.

1.5+1+3.5 Punkte

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ (x,y) \mapsto \phi(x,y) := \big(A \sin(\alpha\, y) + B \cos(\alpha\, y)\big) \exp(\alpha\, x), \end{cases}$$

mit $A, B, \alpha \in \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Skizzieren Sie das Gebiet $\Omega = \mathbb{R}_+ \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

c) Geben Sie mit Hilfe von (a) die Lösung des folgenden Problems an:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \\ u(x, y=0) = u(x, y=1) = 0, \\ u(x=0, y) = 3 \sin(3\,\pi y). \end{cases}$$

> **Hinweis:** Verwenden Sie, dass $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ \forall y \in \mathbb{R}}} u(x,y) < \infty$.

d) Wie lautet die allgemeine Lösungsformel für das folgenden Problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \\ u(x, y=0) = u(x, y=1) = 0, \\ u(0, y) = f(y), \end{cases}$$

mit $f(0) = f(1) = 0$ und mit Hilfe von (c)?

> **Hinweis:** Verwenden Sie, dass $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ \forall y \in \mathbb{R}}} u(x,y) < \infty$.

1.5+1+1.5+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Gegeben ist das Poisson-Problem

$$-\Delta u(x,y) = q(x,y) \qquad \text{für } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

und Randbedingungen

$$\begin{cases} u &= 0 \qquad \text{auf } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \qquad \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

mit einer Quelle $q(x,y)$ auf der folgenden Geometrie mit $a, b \in \mathbb{R}$.

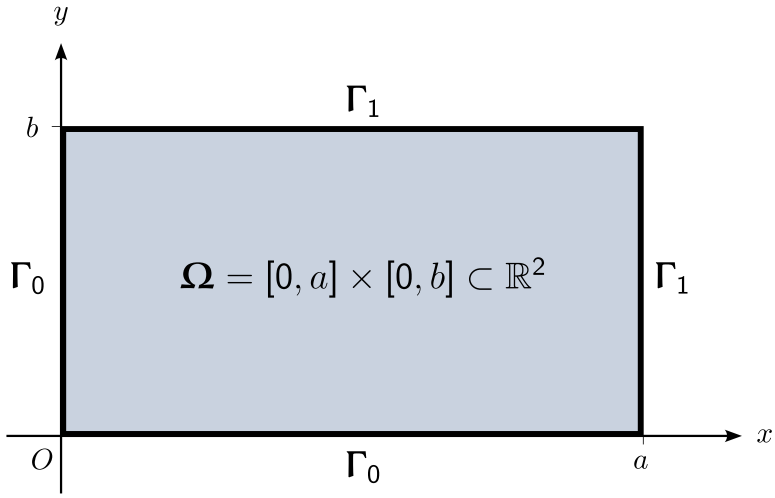

Abbildung 1: Poisson auf dem Rechteck: Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Randbedingungen Γ_0 und Γ_1.

Zur Lösung gehen wir in drei Schritten vor.

a) Berechnen Sie die normierten Eigenfunktionen φ des Laplace-Operators auf dem 1D Intervall $[0,c]$ mit $c > 0$, und den Randbedingungen

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(c) = 0. \end{cases}$$

b) Machen Sie mit Hilfe von (a) einen geeigneten Ansatz für die Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der obigen 2D-Geometrie, und validieren Sie den Ansatz.

c) Geben Sie die Lösung des Poisson-Problems für Quellen der Form

$$q(x,y) = \eta\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$$

an. Finden Sie geeignete Substitutionen für $x/a, y/b$.

d) Wie muss die Quelle $q(x,y)$ gewählt werden, damit die Lösung die Form

$$u(x,y) = \sin\left(\frac{\pi\, x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi\, y}{2b}\right)$$

hat? Passt die Quelle in die Form aus (c)?

2+3.5+2.5+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

Gegeben ist das Funktional

$$T : \begin{cases} \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \\ \phi \mapsto \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x}\Big(\phi(x) - \phi(-x)\Big)\,dx, \end{cases}$$

für das gezeigt werden soll, dass es sich um eine Distribution handelt. Dazu gehen wir schrittweise vor.

a) Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

b) Für die Beschränktheit muss für alle $\phi \in \mathcal{D}$ gelten, dass $|T(\phi)| < \infty$ ist. Zerlegen Sie dazu das Integral in zwei Teile mit den Intervallen $(0, 1]$ und $[1, \infty)$ und entwickeln Sie die Funktion ϕ auf dem Interval $[0, 1]$ als Taylor-Reihe (Konstantes + Lineares Glied genügt) um $x = 0$. Schätzen Sie dann beide Teile unabhängig voneinander ab.

c) Zeigen Sie durch Umformung, dass $T(\phi)$ dem uneigentlichen Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x}\,\phi(x)\,dx$$

entspricht. (Damit wird die unstetige, nicht überall lokal-integrierbare Funktion $1/x$ als Distribution interpretiert.)

> **Hinweis:** Schreiben Sie das Integral wieder über $[0, \infty)$, und dazu berechnen Sie die Distribution $T_f\phi$ wobei $f(x) := 1/x$.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $\ln|x|$ als reguläre Distribution

$$S : \begin{cases} \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \\ \phi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \ln|x|\,\phi(x)\,dx, \end{cases}$$

die obige Distribution T als distributionelle Ableitung besitzt.

> **Hinweis:** Schreiben Sie das Integral wieder über $[0, \infty)$, und dazu vergleichen Sie die distributionelle Ableitung $DS_g\phi$ mit $T_f\phi$, wobei $g(x) := \ln|x|$.

1+2+1+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
y_k	4	2	1	2

ein **reelles** trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(y;x) = \sum_{k=0}^{3} \widehat{d}_k(y)\cos(kx),$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung $T_4(y;x_k) = y_k$ für $k = 0, 1, 2, 3$ erfüllt.

4 Punkte

Aufgabe 6.

a) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f wie folgt

$$f''(x) \approx \frac{2}{h_1 + h_2} \left(\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1} \right), \quad h_1, h_2 > 0$$

Bestimmen Sie die Approximationsordnung.

b) Die erste Ableitung einer Funktion u an der Stelle ξ soll mit Hilfe einer Differenzenformel, die die Funktionsauswertungen von u an den Stellen ξ, $\xi + h_1$ und $\xi + h_1 + h_2$ benutzt, approximiert werden, d.h.

$$u'(\xi) = a\,u(\xi) + b\,u(\xi + h_1) + c\,u(\xi + h_1 + h_2) + R(u, h),$$

wobei $h_1, h_2, > 0$, $h = \max(h_1, h_2)$ und $R(u, h) = \mathcal{O}(h^p)$ der Fehler der Differenzenformel ist. Bestimmen Sie a, b, c so dass p maximal wird. Wie groß ist dieses?

Hinweis: Entwickeln Sie die Funktion u um die Stelle ξ.

4+3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

Gegeben ist das Konvektions-Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 10u'(x) + u(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \qquad \text{und} \qquad u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

benutzt werden.

a) Bestimmen Sie die Matrix A_h und den Vektor b_h.

b) Geben Sie das *größtmögliche* Intervall $I \ni h$ an für dass die Matrix A_h strikt diagonaldominant ist.

c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine strikt diagonaldominante Matrix A_h erhalten zu können? Wie sähe diese Matrix A_h aus?

Hinweis: Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist **strikt** diagonaldominant sofern $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ gilt.

3+3+2 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung lautet $x^* = (1, -1, -1)^T$.

a) Begründen Sie, dass das Jacobi-Verfahren gegen die Lösung dieses linearen Gleichungssystems konvergiert.

b) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens mit Startwert $x^0 = (1, 1, 1)^T$ durch.

c) Wie viele Schritte sind höchstens notwendig, um ausgehend von $x^0 = (1, 1, 1)^T$ den Fehler im Startwert in der ∞-Norm, um den Faktor $R = 10^3$ reduzieren zu können?

> **Hinweis:** Sie können $\log_{10}(2) \approx 0.30102999566398$ anwenden, falls notwendig.

2+2+2 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.:

Viel Erfolg!