Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Benjamin Berkels
Dr. Stefanie Braun
Tuan Vo
Tamme Claus

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2022
Klausur | 10.08.2022

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 22.08.2022 von 10:00–13:00 Uhr im Hörsaal I - Hauptgebäude (1010|101) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5	8	7	5	4	6	7	8	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

a) Gegeben sei die dreidimensionale partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2xu_{xy} + 2yu_{yz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z).$$

Man bestimme die Bereiche, in denen die Differentialgleichung *elliptisch*, *hyperbolisch* bzw. *parabolisch* ist.

> **Hinweis:** Stellen Sie die Matrix der Koeffizienten vor den zweiten Ableitungen auf und untersuchen Sie deren Eigenwerte.

b) Wann ist das nichtlineare System

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(u^2/2 + v\right) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \left(uv + u\right) = 0, \end{cases}$$

hyperbolisch?

3+2 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben ist die Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \alpha \cos(kx), \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit Amplitude $\alpha \in \mathbb{R}$ und Wellenzahl $k \in \mathbb{R}$ und die partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{array}{lrl} \text{(i)} & \partial_t u + a\partial_x u & = 0 \\ \text{(ii)} & \partial_t u & = \kappa \partial_{xx} u \\ \text{(iii)} & \partial_{tt} u & = c^2 \partial_{xx} u \end{array}$$

mit Koeffizienten $a, \kappa, c \in \mathbb{R}$.

a) Benennen Sie die PDEs und die Rolle der Koeffizienten.

b) Zur Lösung der PDEs machen wir den Ansatz

$$u(x,t) = \alpha e^{-\delta t} \cos(k(x - vt)),$$

mit unbekannten Parametern $\delta, v \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Ansatz die Anfangsbedingung erfüllt und interpretieren Sie die unbekannten Parameter.

c) Zur Berechnung der unbekannten Parameter setzen Sie den Ansatz in die drei PDEs ein. Argumentieren Sie, dass die Faktoren vor den entstehenden cos- und sin-Termen unabhängig von einander verschwinden müssen.

d) Berechnen Sie die unbekannten Parameter für die drei PDEs und geben Sie die Lösung an. Wie ist die Situation im Fall (iii) zu deuten?

3+1+1+3 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Aufgabe 3.

Gegeben ist das Problem

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t) - u(x,t) + \sin(\pi x),\ \forall x \in (0,1),\ t > 0,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0,\ \forall t > 0,$$
$$u_x(1,t) = 0,\ \forall t > 0,$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = a,\ \forall x \in (0,1),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, das heißt, die Anfangsbedingung ist eine konstante Funktion.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen.

b) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung und den Quellterm in Eigenfunktionen.

c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

2+2+3 Punkte

Aufgabe 4.

a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der folgenden Distribution:

$$T_f(\phi) := \langle f, \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

wobei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & 0 < x < 1, \\ x-1, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass partielle Ableitungen von Distributionen vertauscht werden können, analog zu klassischen Funktionen: $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} T, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} T, \phi \right\rangle.$$

c) Finden Sie eine Lösung U der Gleichung

$$-\Delta U = \frac{\partial}{\partial x_1} \delta, \quad \text{in } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right),$$

wobei δ die Dirac-Delta Distribution bedeutet.

2+1+2 Punkte

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(x_k)$	4	2	1	2

ein reelles trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} \hat{d}_j(f)\cos(jx),$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k) \quad \text{für} \quad k = 0,1,2,3$$

erfüllt.

4 Punkte

Aufgabe 6.

a) Bestimmen Sie die Koeffizenten a, b und c, sodass die finite Differenz:

$$af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h) \approx f'(x),$$

die erste Ableitung von f an der Stelle x mit möglichst hoher Ordnung approximiert. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung.

b) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f:

$$\frac{2}{h_1 + h_2}\left(\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1}\right)$$

Bestimmen Sie die Konsistenzsordnung.

3+3 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei folgendes Randwertproblem:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{10}u''(x) + u'(x) + u(x) = f(x), & \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Zur Approxmation der Lösung von (1) auf einem äquidistanten Gitter $x_j = jh$ sollen folgende Differenzenquotienten verwendet werden:

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$
$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}.$$

a) Leiten Sie das Gleichungssystem für die gegebene Approximation von Problem (1) her.

b) Unter welcher Bedingung handelt es sich bei der Diskretisierungsmatrix um eine L-Matrix?

c) Geben Sie eine Diskretisierung an, die ohne Zusatzbedingung stabil ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

3+1+3 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mit Lösung $x = \left(-\frac{13}{56}, -\frac{13}{16}, -\frac{29}{56}\right)^T$.

a) Konvergieren das Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren für jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^3$?

b) Führen Sie **einen Schritt** mit dem Jacobi-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (1, 0, 0)^T$.

c) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen zur Anwendung des CG-Verfahrens gegeben sind und führen Sie **einen Schritt** mit dem CG-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (0, -1, -1)^T$.

d) Welches Ergebnis erhält man nach **drei Schritten** mit dem CG-Verfahren?

2+1+4+1 Punkte