Prof. Dr. Benjamin Stamm
Jun.-Prof. Sebastian Krumscheid

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2021
Klausur | 12.08.2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 03.09.2021 von 10:00–12:00 Uhr im Eph (1090|321) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	4	6.5	6	5	6.5	6	5	45
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

(a) Klassifizieren Sie die PDEs

(i) $\partial_t u - \Delta u + u^2 = x$,

(ii) $\partial_t u - u\partial_x u = x^2$,

(iii) $\partial_t u - \partial_x u = x^2$,

(iv) $\partial_{tt} u - \Delta u = 0$.

(b) Lösen Sie mit der Methode der Charakteristiken das folgende Anfangswertproblem: $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $a > 0$, $\Gamma(r) = (0, r)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $u_0(r) = r^3$

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + a\partial_x u(t,x) = u(t,x), & \text{in } \Omega, \\ u(\Gamma(r)) = u_0(r), & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

0.5+0.5+0.5+0.5+4=6 Punkte

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\phi_{j,k}(x,y) = \cos(j\pi x)\sin(k\pi y), \quad j = 0,1,2,\ldots, \ \ k = 1,2,\ldots$$

die Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf $\Omega = [0,1]^2$ sind. Wie lauten die Eigenwerte?

(b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big[\sin(4\pi y) - \cos(4\pi x)\sin(10\pi y)\big]$$

in den Eigenfunktionen $\phi_{j,k}$.

(c) Geben Sie die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t,x,y) &= \Delta u(t,x,y) + f(x,y) \quad \text{in } \Omega \\
u(t,x,y) &= 0 \quad \forall y \in \{0,1\},\ \forall x \in (0,1) \\
\partial_x u(t,x,y) &= 0 \quad \forall x \in \{0,1\},\ \forall y \in (0,1) \\
u(t,x,y) &= 0 \quad \text{bei } t = 0
\end{aligned}$$

an.

1+2+4=7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der folgenden Distribution:

$$T_f\phi := (f, \phi), \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

wobei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & 0 < x < 1, \\ x-1, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass partielle Ableitungen von Distributionen vertauscht werden können, analog zu klassischen Funktionen: $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} T, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} T, \phi \right\rangle.$$

(c) Finden Sie eine Lösung U der Gleichung

$$-\Delta U = \frac{\partial}{\partial x_1}\delta, \quad \text{in } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right),$$

wobei δ die Dirac-Delta Distribution bedeutet.

2.5+2.5+3=8 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

(a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F}\left(f(x+c)\right)(\xi) = e^{i\langle \xi, c\rangle}\mathcal{F}(f)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

gilt, wobei $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation bedeutet.

(b) Seien $f, g \in S$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F}\left(f * g\right) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),$$

wobei $f * g$ die Faltung von f und g bedeutet und S die Schwarztsche Raum ist.

(c) Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Dirac-Delta Distribution.

2+2+5=9 Punkte

Aufgabe 5.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u(x) = x^4, & \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

für $\varepsilon \neq 0$ und diskretisieren das Gebiet im Inneren mit einem äquidistanten Gitter mit $N \in \mathbb{N}$ Gitterpunkten x_n:

$$x_n = nh, \quad h = \frac{1}{N+1}, \qquad n = 1, \dots, N.$$

Zur Approximation der Lösung des Randwertproblems nutzen wir die Methode der finiten Differenzen, im Speziellen:

$$u''(x_n) \approx \frac{u(x_n + h) - 2u(x_n) + u(x_n - h)}{h^2}$$

für $1 \leq n \leq N$.

(a) Geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem $A_h u_h = b_h$ an.

(b) Seien $\lambda_{\text{min}}(A_h)$ und $\lambda_{\text{max}}(A_h)$ der kleinste bzw. größte Eigenwert der Matrix A_h aus Teil (a). Zeigen Sie, dass

$$\min\left(1, 1 + \frac{4\varepsilon}{h^2}\right) < \lambda_{\text{min}}(A_h), \qquad \lambda_{\text{max}}(A_h) < \max\left(1, 1 + \frac{4\varepsilon}{h^2}\right)$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ die Matrix A_h für beliebiges N invertierbar ist.

(d) Was können Sie über die Invertierbarkeit der Matrix A_h und die Lösung des Randwertproblems (1) sagen, wenn $\varepsilon = 0$?

Hinweis:

- Die Eigenwerte der $N \times N$ Tridiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{lauten } \lambda_n = 2\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right),\ n = 1, ..., N.$$

- Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A = \alpha I + B$, wobei $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die Einheitsmatrix und $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine beliebige andere Matrix ist. Dann gilt für das Spektrum $\sigma(A)$ von A:

$$\lambda \in \sigma(B) \iff (\alpha + \lambda) \in \sigma(A)$$

- Denken Sie an den Zusammenhang zwischen der Determinante einer Matrix und dem Produkt ihrer Eigenwerte.

3+3+2+1=9 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 26 \\ 4 \end{bmatrix},$$

samt Lösung $x^* = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 1 \end{bmatrix}^\top$.

(a) Begründen Sie, warum das Jacobi-Verfahren gegen die Lösung des linearen Gleichungssystems konvergiert für jeden beliebigen Startwert.

(b) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens durch. Nutzen Sie den Startwert $x_0 = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}^\top$.

(c) Wie viele Schritte sind höchstens für das Jacobi-Verfahren notwendig, um ausgehend von $x_0 = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}^\top$ den Fehler im Startwert in der ∞-Norm um den Faktor $R = 10^3$ zu reduzieren?

(d) Wie viele Schritte erwarten Sie sind notwendig in Teil (c), falls man anstatt des Jacobi-Verfahrens das Gauß-Seidel Verfahren verwendet? Begründen Sie Ihre Antwort. Es sind keine Rechnungen nötig.

Hinweis:

- Sie können in Teil (c) die Näherung $\frac{3}{7} \approx \frac{1}{2}$ verwenden.
- Sei $M = (m_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann gilt: $\|M\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$

3+2+2+2=9 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$f(x_k)$	3	0	-1	0

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0, \ldots, 3$$

erfüllt.

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$u''(x) - u'(x) + u(x) = 2x - 1 - x^2,$$

für $x \in (0, 1)$ mit den gemischten Randbedingungen

$$u(1) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

Diskretisieren Sie das Randwertproblem mittels den finiten Differenzen:

$$\begin{aligned} u''(x) &\approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}, \\ u'(x) &\approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}, \end{aligned}$$

auf einem gleichmäßigen Gitter mit Schrittweite $h = \frac{1}{N}$ und Gitterpunkten $x_n = nh,\ n = 0, \dots, N$. Approximieren Sie die Ableitung am linken Randpunkt mithilfe eines zusätzlichen (fiktiven) Punktes außerhalb des Gebiets, den Sie hinterher wieder geeignet entfernen.

(a) Geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem $A_h y_h = b_h$ an.

(b) Die exakte Lösung des Randwertproblems lautet $u(x) = 1 - x^2$. Bestimmen Sie den Konsistenzfehler der finiten Differenz Methode bzgl. der ∞-Norm.

5+3=8 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: