Prof. Dr. Benjamin Stamm
Jun.-Prof. Sebastian Krumscheid, Ph.D.

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2020
Klausur | 07.08.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 26.08.2020 von 14:00–16:00 Uhr im TEMP2 (1515|002) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	4	6.5	6	5	6.5	6	5	45
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem: Suche $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sodass

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) = \chi_{[-1,1]}(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

wobei $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

b) Klassifizieren Sie die PDEs

(i) $-\Delta u + u^2 = f$

(ii) $\partial_t u - \partial_x u + u^2 = f$

4+2 Punkte

Aufgabe 2.

Sei $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Sei $u_0(x) = 1 + x$ und $\Gamma(r) = (0, r), r \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u(\Gamma(r)) = u_0(r) & r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4 Punkte

Aufgabe 3.

Sei $\tilde{f} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\tilde{f}(x) = |x|$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als die periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$, d.h. für $x \in [2k-1, 2k+1]$ gilt $f(x) = |x - 2k|, \forall k \in \mathbb{Z}$.

a) Berechnen Sie die erste Ableitung DT_f im Sinne der Distributionen.

b) Berechnen Sie die zweite Ableitung D^2T_f im Sinne der Distributionen.

c) Berechnen Sie $(D^2T_f \star \phi)(x)$.

d) Lösen Sie die PDE im Sinne der Distributionen (in $\mathbb{R}$)

$$-\partial_{xx}U = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}\delta_k \quad \text{in } \mathcal{D}'$$

wobei $\delta_k(x) = \delta(x-k)$ die Dirac-Delta Distribution in k ist.
Erinnerung: Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}$ ist $G(x) = \frac{1}{2}|x|$.

1.5+2+1+2 Punkte

Aufgabe 4.

a) Seien X, Y zwei normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Geben Sie die Definition eines linearen Operators an und beweisen Sie, dass

$$T \text{ beschränkt} \Leftrightarrow T \text{ stetig.}$$

b) Betrachten Sie das Eigenwertproblem: Finde (λ, ϕ), sodass

$$\begin{cases} -\partial_{xx}\phi = \lambda\phi & \text{auf } \Omega = (0,1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}.$$

Geben Sie alle Eigenwerte und (normalisierten) Eigenfunktionen an. Berechnen Sie anhand der Spektralzerlegung die Norm

$$\|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_0^1 |\nabla f(x)|^2 \, dx$$

für $f(x) = 2\sin(\pi x) - 4\sin(2\pi x)$.

4+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Betrachten Sie äquidistante Stützstellen $x_k = \frac{2\pi k}{n}$ für $k = 0, \dots, n-1$ und zugehörige Daten $y = (y_0, \dots, y_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$. Ferner, sei $\hat{y} = (\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ die diskrete Fourier-Transformierte von y, d.h. $\hat{y}_k = d_k(y)$.

a) Zeigen Sie, dass das trigonometrische Polynom

$$T_n(y; x) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{y}_j e^{ijx}$$

die Werte $(x_k, y_k), k = 0, \dots, n-1$ interpoliert.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $\sum_{j=0}^{n-1} (\varepsilon_n)^{mj} = n\delta_{m,0}$ für alle $m \in \{-n+1, \dots, n+1\}$, wobei ε_n die n-te Einheitswurzel bezeichnet.

b) Bestimmen Sie zu den Werten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\hat{y}_k$	0	1	2	3

die inverse (diskrete) Fourier-Transformierte $\check{y} = (\check{y}_0, \dots, \check{y}_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ zu $\hat{y}$.

2+3 Punkte

Aufgabe 6.

a) Bestimmen Sie die Koeffizenten a, b und c, sodass die finite Differenz:

$$af(x) + bf(x+h) + cf(x-2h) \approx f'(x)$$

die erste Ableitung von f an der Stelle x mit möglichst hoher Ordnung approximiert. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung.

b) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f:

$$\frac{2}{h_1 + h_2}\left(\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1}\right)$$

Bestimmen Sie die Konsistenzsordnung.

4+2.5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert jeweils das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren für beliebige Startvektoren $x^0 \in \mathbb{R}^3$?

Sei nun $\alpha = 3$ gegeben. Dann ist $x^* = \frac{1}{21}(5, -15, -19)^T$ eine Lösung des LGS.

b) Führen Sie einen Schritt mit dem Gauß-Seidel-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (1, 0, 0)^T$.

c) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen zur Anwendung des CG-Verfahrens gegeben sind und führen Sie einen Schritt mit dem CG-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (0, -1, -1)^T$.

d) Welches Ergebnis erhält man nach drei Schritten mit dem CG-Verfahren?

1.5+1+2.5+1 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 10u'(x) + u(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten?

2+1+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: