Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Benjamin Berkels

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2019
Klausur | 26.07.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 09.08.2019 von 14:00–15:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstraße 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	9	11	9	11	8	12	10	10	80
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass

$$\partial_t u + \partial_x u + a\,\partial_x v = 0$$
$$\partial_t v + b\,\partial_x u + \partial_x v = 0$$

ein hyperbolisches System ist für $ab > 0$.

b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem für $a = b = 1$ mit den Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \sin x$$
$$v_0(x) = \cos x$$

c) Welche Bedeutung haben die Eigenwerte der Jacobi-Matrix des hyperbolischen Systems in der Lösung?

9 Punkte

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass

$$\phi(x,y) = (A\sin(\alpha y) + B\cos(\alpha y))\, e^{\alpha x}$$

mit $A, B, \alpha \in \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Skizzieren Sie das Gebiet $\Omega = \mathbb{R}^+ \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

c) Geben Sie mit Hilfe von (a) die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega \\ u(x, y=0) = u(x, y=1) = 0 \\ u(0,y) = 3\sin(3\pi y) \end{cases}$$

an. (Tipp: $\lim_{x\to\infty} u < \infty$)

d) Wie lautet die allgemeine Lösungsformel für

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega \\ u(x, y=0) = u(x, y=1) = 0 \\ u(0,y) = f(y) \end{cases}$$

mit $f(0) = f(1) = 0$ und mit Hilfe von (c)?

11 Punkte

Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie die ersten zwei distributionellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller regulären Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ einen Vektorraum bildet.

(c) Zeigen Sie:

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

ist eine Fundamentallösung der Laplacegleichung in $\mathbb{R}^2$:

$$-\Delta\gamma = \delta.$$

9 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben ist das Problem

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \partial_{xx} u(x,t) - u(x,t) + \sin(\pi x), && x \in (0,1), t > 0 \\
u(0,t) &= 0, && t > 0 \\
u_x(1,t) &= 0, && t > 0 \\
u(x,0) &= a, && x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

mit einer konstanten Anfangsbedingung $a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen.

(b) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung und den Quellterm in Eigenfunktionen.

(c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

11 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
y_k	1	2	-1	2

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(y;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(y) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(y;x_k) = y_k, \text{ für } k = 0,..,3$$

erfüllt.

8 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 7u'(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(c) Geben Sie eine mögliche Finite Differenzen Diskretisierung für die gegebene Differentialgleichung an, sodass die resultierende Matrix A_h **für alle** $h > 0$ strikt diagonal dominant ist.

Hinweis: Eine Matrix A ist diagonal dominant wenn

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|, \quad \forall \quad i.$$

Hinweis: Eine Matrix A ist strikt diagonal dominant wenn sie diagonal dominant ist und für mindestens ein $i = k$

$$\sum_{k \neq j} |a_{kj}| < |a_{kk}|.$$

12 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

a) Bestimmen Sie die Koeffizenten a, b und c, sodass die finite Differenz:

$$af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h) \approx f'(x)$$

die erste Ableitung von f an der Stelle x mit möglichst hoher Ordnung approximiert. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung.

b) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f:

$$\frac{2}{h_1 + h_2}\left(\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1}\right)$$

Bestimmen Sie die Konsistenzsordnung.

10 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung lautet $x^* = [1,\ -1,\ -1]^T$.

(a) Begründen Sie, dass das Jacobi-Verfahren gegen die Lösung dieses linearen Gleichungssystems konvergiert.

(b) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens mit dem Startwert $x^0 = [1,\ 1,\ 1]^T$ durch.

(c) Wieviele Schritte sind höchstens notwendig, um ausgehend von $x^0 = [1,\ 1,\ 1]^T$ den Fehler im Startwert in der ∞-Norm um den Faktor $R = 10^3$ zu reduzieren?

10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: