Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2018
Klausur | 06.08.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 21.08.2018 von 8:30–10:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstraße 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5	7,5	7	5,5	5	7,5	6	6,5	50
Ihre Punkte									

Klausur ☐ + Bonus ☐ = Gesamt ☐ Note: ☐

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Gleichung

$$2u_x(x,y,z) + 3u_y(x,y,z) - 4u_z(x,y,z) = \cos(y), \qquad x \in \mathbb{R}_+, y, z \in \mathbb{R}$$
$$u(0,y,z) = u_0(y,z) \;\; y, z \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

   i) Formulieren Sie dazu zunächst die Differentialgleichung, die die Lösung entlang der Charakteristiken erfüllt.

   ii) Lösen Sie anschließend diese Differentialgleichung.

c) Überprüfen Sie, ob die in b) bestimmte Lösung die Gleichung erfüllt.

1+3+1 = 5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Wir betrachten das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

a) Wir betrachten die gesuchte Funktion in Polarkoordinaten $u = u(r, \varphi)$. Der Laplace-Operator lautet dann:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Benutzen Sie den Ansatz der „Trennung der Variablen“: $u(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ und leiten Sie daraus je eine gewöhnliche Differentialgleichung für R und eine für Φ in Abhängigkeit von *einem gemeinsamen* Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ her.

b) Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für Φ. Schränken Sie die Wahl des Parameters λ so ein, dass ihre Lösungen 2π-periodisch sind und geben Sie diese an. Betrachten Sie den Fall $\lambda = 0$ gesondert.

c) Benutzen Sie für die radiale Funktion R den Ansatz $R(r) = cr^\alpha$ und geben Sie die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung für R an. Schränken Sie die Wahl des Parameters sinnvoll ein.

d) Zeigen Sie, dass sich die Lösung des Randwertproblems durch folgende Reihe darstellen lässt:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Big\{ A_n \sin(n\varphi) + B_n \cos(n\varphi) \Big\}.$$

Wie lassen sich die Koeffizienten A_n und B_n bestimmen und welchem Zusammenhang stehen Sie mit der Funktion $g(\varphi)$?

e) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Randfunktion $g(\varphi) = 2\sin(2\varphi) + 4\cos(6\varphi) + 2\sin(6\varphi)$.

1+3+1+1,5+1 = 7,5 Punkte

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender Funktionen:

a) $f(x) = e^{-x^2/2}$

b) $f(x) = H(1 - x^2)$. Dabei ist H die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

4+3 = 7 Punkte

Aufgabe 4.
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - 2\varphi(0) \right]$$

eine Distribution definiert.
Hinweis: verwenden Sie die Taylor-Reihe mit Restglied um den Punkt $x = 0$.

5,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ und der imaginären Einheit i gilt:

$$e^{i2\pi x} = 1 \iff x \in \mathbb{Z}.$$

b) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabenteil a), dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi mj}{N}} = \begin{cases} N & \text{falls } \frac{m}{N} \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Die geometrische Reihe erfüllt $\sum_{j=0}^{N-1} q^j = \frac{1-q^N}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

c) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabenteil b), dass die Vektoren:

$$\mathbf{v}^{(K)} = (v_0^{(K)}, v_1^{(K)}, \ldots, v_{N-1}^{(K)})^\top \in \mathbb{C}^N, \qquad v_j^{(K)} := e^{\frac{i2\pi Kj}{N}}$$

paarweise orthogonal sind, also dass für $K, L \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, $K \neq L$ gilt:

$$\mathbf{v}^{(K)\top}\overline{\mathbf{v}^{(L)}} = 0.$$

1+2+2 = 5 Punkte

Aufgabe 6.

a) Bestimmen Sie die Koeffizenten a, b und c, sodass die finite Differenz:

$$af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h) \approx f'(x)$$

die erste Ableitung von f an der Stelle x mit möglichst hoher Ordnung approximiert. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung.

b) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f:

$$\frac{2}{h_1 + h_2}\left(\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1}\right)$$

Bestimmen Sie die Konsistenzsordnung.

5+2,5 = 7,5 Punkte

Aufgabe 7.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + \kappa u(x) &= x^2, \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

und diskretisieren das Gebiet mit äquidistanten Gitterpunkten x_n:

$$x_n = nh, \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad n = 1, ..., N.$$

Um die Lösung des Problems anzunähern, benutzen wir die Methode der finiten Differenzen:

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}.$$

a) Geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem $A_h u_h = b_h$ an.

b) Seien $\lambda_{\text{min}}(A_h)$ und $\lambda_{\text{max}}(A_h)$ der kleinste bzw. größte Eigenwert der Matrix A_h. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_{\text{min}}(A_h) > \kappa, \quad \lambda_{\text{max}}(A_h) < \frac{4}{h^2} + \kappa,$$

gilt.

c) Für welche werte von κ ist die Matrix A_h für beliebige $N \in \mathbb{N}$ invertierbar?

Hinweis:

- Die Eigenwerte der $N \times N$ Tridiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{lauten } \lambda_n = 2\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right),\ n = 1, ..., N.$$

- Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A = \alpha I + B$, wobei $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die Einheitsmatrix und $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine beliebige andere Matrix ist. Dann gilt für das Spektrum $\sigma(A)$ von A:

$$\lambda \in \sigma(B) \iff (\alpha + \lambda) \in \sigma(A)$$

- Denken Sie an den Zusammenhang zwischen der Determinante einer Matrix und dem Produkt ihrer Eigenwerte.

1,5+2,5+2 = 6 Punkte

Aufgabe 8.

a) Geben Sie die Jacobi- und Gauß-Seidel Iterationen für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ an. Dabei sei die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ quadratisch und habe die Zerlegung:

$$A = D - L - R,$$

wobei:

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{NN}),$$
$$L = (l_{ij})_{i,j=1}^N, \quad l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{falls } i > j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$R = (r_{ij})_{i,j=1}^N, \quad r_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{falls } i < j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Sei A nun wie folgt definiert:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad d \neq 0, \quad ad \neq bc.$$

Geben Sie die Iterationsmatrix für beide Verfahren an.

c) Zeigen Sie für die Matrix A aus b), dass die Verfahren genau dann für alle Startwerte konvergieren wenn gilt:

$$\left| \frac{bc}{ad} \right| < 1.$$

d) Geben Sie mithilfe von c) an, für welche der folgenden Matrizen die Iterativen Verfahren konvergieren.

i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) Angenommen die Matrix A sei *nicht* symmetrisch positiv definit. Folgt daraus, dass die Gauß-Seidel Iteration nicht für alle Startwerte konvergiert? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

1+1+2+1,5+1 = 6,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: