Prof. Dr. Martin Frank
Prof. Dr. Martin Grepl

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2017
Klausur | 08.08.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 22.08.2017 von 8:30–10:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5	7	6	7	7	7	5	6	50
Ihre Punkte									

Klausur ☐ + Bonus ☐ = Gesamt ☐

Note: ☐

Aufgabe 1.
Leiten Sie für die folgende partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} &= 0 \quad \text{für } (x,y) \in \,]-\infty,\infty[\, \times \,]0,1[\,, \\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für } x \in \,]-\infty,\infty[\,, \\ u(x,1) &= f(x) \quad \text{für } x \in \,]-\infty,\infty[\,, \end{aligned}$$

auf dem unendlichen Streifen mittels der Fourier-Transformation eine Lösungsformel her.

5 Punkte

Aufgabe 2.

Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = 0 \text{ in }]0,1[\times]0,1[\,, \\ u(x,0) & = \sin(2\pi x) \text{ für } x \in]0,1[\\ u(x,1) & = 0 \text{ für } x \in]0,1[\,, \\ u(0,y) & = 0 \text{ für } x \in]0,1[\,, \\ u(1,y) & = 0 \text{ für } x \in]0,1[\,. \end{cases}$$

Nutzen Sie dazu die Methoden, die Ihnen aus der Vorlesung bekannt sind.

7 Punkte

Aufgabe 3.

Lösen Sie die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x^2 - t^2, \\ u(0,x) &= \frac{1}{2}(7e^x - 3e^{-x}), \\ u_t(0,x) &= -e^x + 3e^{-x}. \end{aligned}$$

Nutzen Sie dazu die Methoden, die Ihnen aus der Vorlesung bekannt sind.

6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung im Sinne der Distributionen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der f im distributionellen Sinne genügt.

c) Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Testfunktion. Welche der folgenden Ausdrücke definieren eine Distribution?

1) $T_1(\phi) = \left(\int_0^1 \phi(x)\,dx\right)^2$

2) $T_2(\phi) = \phi(0) + \phi'(1)$

3) $T_3(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi'(x)\,dx - \int_0^1 x\phi(x)\,dx$

Begründen Sie Ihre Antworten.

2.5+1.5+3 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 5u'(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(c) Geben Sie eine mögliche Finite Differenzen Diskretisierung für die gegebene Differentialgleichung an, so dass die resultierende Matrix A_h strikt diagonal dominant ist.

Hinweis: Eine Matrix A ist strikt diagonal dominant wenn

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

für mindestens ein $i = k$ und

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|, \quad \forall \quad i \neq k.$$

2.5+2+2.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine s.p.d. Matrix und $D := \text{diag}(A)$. Zeigen Sie:

Es existiert ein $c_0 > 0$, so dass $2c_0D - A$ s.p.d (symmetric positive definite) ist.

(b) Wir betrachten das Richardson Verfahren für ein Gleichungssystem $Ax = b$:

$$x^{k+1} = x^k + \omega(b - Ax^k).$$

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche Werte ω konvergiert die Methode?

(ii) Bestimmen Sie den optimalen Wert für ω?

3.5 + 3.5 Punkte

Aufgabe 7.
Bestimmen Sie zu den Daten

k	0	1	2	3
x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	3	1	2	3

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0,..,3$$

erfüllt.

5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Betrachten Sie das Randwert-Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= g(x) \quad x \in (0,1) \\ u'(0) = u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

a) Finden Sie die Eigenfunktionen des Differentialoperators

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}.$$

b) Sei $g(x)$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Nutzen Sie die folgende Darstellung für u, gegeben durch

$$u = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cos(i\pi x)$$

um eine Lösung des Randwert-Problems zu finden.

Hinweis: $\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx = \frac{1}{2}\delta_{nm}$ mit dem Kronecker Delta δ_{nm}.

3 + 3 Punkte