Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Mike Espig

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2016
Klausur am 01.08.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u + 2\partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + \alpha\partial_x u - \partial_x v &= 0 \end{aligned}$$

genau dann ein hyperbolisches System ist, wenn $\alpha > -\frac{1}{2}$ gilt.

(b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem für $\alpha = \frac{3}{2}$ mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x \\ v_0(x) &= x^2 \end{aligned}$$

(c) Welche Bedeutung haben die Eigenwerte der Jacobi-Matrix des hyperbolischen Systems in der Lösung?

1+2,5+0,5 Punkte

Aufgabe 2.

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 && \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u(0,y) &= 0, && y \in (0,1), \\ u_x(1,y) &= \sin(2\pi y), && y \in (0,1), \\ u(x,0) &= 0, && x \in (0,1), \\ u(x,1) &= 0, && x \in (0,1). \end{aligned}$$

3,5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben ist das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_{xx} u(x,t) - u(x,t) + \sin(\pi x), && x \in (0,1), t > 0 \\ u(0,t) &= 0, && t > 0 \\ u_x(1,t) &= 0, && t > 0 \\ u(x,0) &= a, && x \in (0,1) \end{aligned}$$

mit einer konstanten Anfangsbedingung $a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen.

(b) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung und den Quellterm in Eigenfunktionen.

(c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

2,5+2+2,5 Punkte

Aufgabe 4.

(a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Distribution

$$T_{f(x)}\phi = \int_{\mathbb{R}} f\phi dx, \quad \text{mit}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^- \\ 1 - \exp(-x), & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass $G(x) = H(x)(1 - exp(-x))$ mit der Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^- \\ 1, & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

die Fundamentallösung des Differentialoperators

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$$

ist.

1+1,5 Punkte

Aufgabe 5.

Gesucht ist $u \in C^2((0,1))$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x), \qquad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter mit den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ übergeführt werden.

a) Bestimmen Sie die Matrix A.

b) Geben Sie Schranken für die Eigenwerte von A an.
Hinweis: Gerschgorin Kreise.

c) Geben Sie Schranken für die L_2-Norm von A und von A^{-1} an.

d) Geben Sie Schranken für die Konditionszahl von A an.

e) Bestimmen Sie die L_∞-Norm von A.

f) Bestimmen Sie die L_1-Norm von A.

1,5+1+1+0,5+0,5+0,5 Punkte

Aufgabe 6.

(a) Gegeben sei folgende Approximation von $f''(x)$ für ausreichend glattes f:

$$\frac{2}{h_1 + h_2}\left(\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1}\right)$$

Bestimmen Sie die Approximationsordnung.

(b) Die erste Ableitung einer Funktion u an der Stelle ξ soll mit Hilfe einer Differenzenformel, die die Funktionsauswertungen von u an den Stellen ξ, $\xi + h_1$ und $\xi + h_1 + h_2$ benutzt, approximiert werden, d.h.

$$u'(\xi) = a\,u(\xi) + b\,u(\xi + h_1) + c\,u(\xi + h_1 + h_2) + R(u,h),$$

wobei $h = \max(h_1, h_2)$ und $R(u,h) = \mathcal{O}(h^p)$ der Fehler der Differenzenformel ist. Bestimmen Sie a, b, c so, dass p maximal wird. Wie groß ist dieses?

Hinweis: Entwickeln Sie u um die Stelle ξ.

1,5+3,5 Punkte

Aufgabe 7.
Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}$
$f(x_k)$	6	$2+2i$	2	$2-2i$

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f)e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k),\ \text{für } k = 0,..,3$$

erfüllt.

2,5 Punkte

Aufgabe 8.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine s.p.d. Matrix und $D := \text{diag}(A)$. Zeigen Sie:

Es existiert ein $c_0 > 0$, so dass $2c_0 D - A$ s.p.d. ist.

(b) Wir betrachten das Richardson Verfahren für ein Gleichungssystem $Ax = b$:

$$x^{k+1} = x^k + \omega(b - Ax^k).$$

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche Werte ω konvergiert die Methode?

(ii) Bestimmen Sie den optimalen Wert für ω?

3+2 Punkte