Prof. Dr. Martin Frank
Dr. Stephan Martin

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2015
Klausur am 27.07.2015 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Gegeben sei ein Cauchyproblem mit folgender partiellen Differentialgleichung

$$-u_x(x,y) + \frac{1}{2} y u_y(x,y) = x^3 \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u(0,y) = y \ , \ y \in \mathbb{R}.$$

Lösen Sie das Problem mit der Methode der Charakteristiken.

a) Bestimmen Sie das System der Gleichungen der Charakteristiken.

b) Bestimmen Sie damit die Charakteristiken.

c) Bestimmen Sie die Lösung der PDE. Stellen Sie dazu sicher, dass die Rücktransformation wohldefiniert ist.

d) Überprüfen Sie, ob die gefundene Lösung das Cauchyproblem erfüllt.

2+1+1+1

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie mittels Trennung der Variablen eine Lösung des Randwertproblems

$$u_t(x,t) - a u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,t) \ \ t \geq 0, x \in [0, \ell],$$
$$u(0,t) = 0 \ \forall t \geq 0,$$
$$u(\ell,t) = 0 \ \forall t \geq 0.$$

Berechnen Sie eine Reihendarstellung für $u(x,t)$. Die Koeffizienten der Reihe müssen *nicht* bestimmt werden.

b) Wir betrachten den stationären Wärmeleitprozess im Gebiet $\Omega = B_r(0) \subset \mathbb{R}^3 = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| < r\}$, welcher durch

$$\Delta u(x,y,z) = f(x,y,z) \ , \ x \in B_r(0),$$
$$u|_{\partial\Omega} = \bar{u}$$

beschrieben wird. Gegeben seien nun zwei verschiedene Randbedingungen

$$\bar{u}_1(x,y,z) = 1 \ \ \forall (x,y,z) \in \partial\Omega$$
$$\bar{u}_2(x,y,z) = 1 + \sin(\frac{\pi}{r} z) \ \ \forall (x,y,z) \in \partial\Omega$$

Die jeweiligen Lösungen seien bezeichnet mit $u_1(x,y,z)$ und $u_2(x,y,z)$. Wie lautet der maximale Temperaturunterschied $\|u_1 - u_2\|_\infty$? Geben Sie eine Formel für den Temperaturunterschied im Punkt $(0,0,0)$ an (ohne diesen auszurechnen)! Begründen Sie Ihre Antworten genau.

3+2

Aufgabe 3.

Betrachten Sie die Wellengleichung

$$2\partial_{tt} u(x,t) + \partial_{xt} u(x,t) - 2\partial_{xx} u(x,t) = 0 \ \ \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+.$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung hyperbolisch ist.
Hinweis: Zerlegen Sie $\partial_{xt}u$ in zwei Teile.

b) Zeigen Sie, dass für zwei beliebige C^2-Funktionen F und G und geeignete bilineare Funktionen c, d

$$u(x,t) = F(c(x,t)) + G(d(x,t))$$

eine Lösung ist. Bestimmen Sie c und d.

1+2

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie, ob der Operator

$$(Af)(x) := \int_{-1}^{x} f(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial x} f(x) \qquad C^1((0,1)) \to C^0((0,1))$$

linear ist, und ob er stetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist.

(b) Berechnen Sie die distributionelle Ableitung von

$$T_g\phi := (g,\phi)\,, \text{ wobei } g(x) := \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ -x & , x \geq 0 \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$S\phi := (h,\phi) + \phi(0) + \phi(1), \text{ wobei } h(x) := \cos(x)$$

eine Distribution ist. Berechnen Sie die distributionelle Ableitung.

Hinweis: Notation

$$(f,\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx\ .$$

2+1+2

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	4	2	1	2

ein reelles trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} \hat{d}_j(f)\cos(jx),$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k) \quad \text{für} \quad k = 1,2,3$$

erfüllt.

4

Aufgabe 6.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$-\frac{1}{20}u''(x) + u'(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$
\begin{aligned}
u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \\
u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}
\end{aligned}
$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der A_h diagonaldominant ist.

(c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingung eine diagonaldominante Matrix A_h zu erhalten?

2+1+2

Aufgabe 7.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.
$$

Die Lösung lautet $x^* = [1,\ -1,\ -1]^T$.

(a) Begründen Sie, dass das Jacobi-Verfahren gegen die Lösung dieses linearen Gleichungssystems konvergiert.

(b) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens mit dem Startwert $x^0 = [1,\ 1,\ 1]^T$ durch.

(c) Wieviele Schritte sind höchstens notwendig, um ausgehend von $x^0 = [1,\ 1,\ 1]^T$ den Fehler im Startwert in der ∞-Norm um den Faktor $R = 10^3$ zu reduzieren?

1+1,5+1,5

Aufgabe 8.

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung in 2D mit $(x, y) \in \Omega =]0, 1[^2$.

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} - u_{yy} &= 0 && \text{für} \quad t > 0,\ (x, y) \in \Omega \\
u(t, x, y) &= 0 && \text{für} \quad (x, y) \in \partial\Omega \\
u(0, x, y) &= u_0(x, y) && \text{für} \quad (x, y) \in \Omega\,.
\end{aligned}
$$

Dieses Problem soll auf einem äquidistantem Raum-Zeit-Gitter

$$
\begin{aligned}
x_i = ih, \quad y_j = jh \quad i, j = 0, \ldots, m \quad h = \frac{1}{m} \\
t_k = k\Delta t, \quad k = 0, \ldots, n \quad \Delta t = \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

mit $u_{i,j}^k \approx u(t_k, x_i, y_j)$ diskretisiert werden. Wir definieren die Differenzenquotienten

$$
\begin{aligned}
\delta_x^2 u_{i,j}^k &= \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2} \\
\delta_y^2 u_{i,j}^k &= \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2}\,.
\end{aligned}
$$

Es wird folgende Diskretisierung vorgeschlagen

$$\frac{u^*_{i,j} - u^k_{i,j}}{\Delta t/2} = \delta_x^2 u^*_{i,j} + \delta_y^2 u^k_{i,j} \tag{1}$$

$$\frac{u^{k+1}_{i,j} - u^*_{i,j}}{\Delta t/2} = \delta_x^2 u^*_{i,j} + \delta_y^2 u^{k+1}_{i,j} \; . \tag{2}$$

Dabei ist $u^*_{i,j}$ ein Zwischenschritt, der durch Lösung von Gleichung (1) bestimmt wird. Genauso wird Gleichung (2) nach $u^{k+1}_{i,j}$ gelöst.

(a) Ordnen Sie die Werte $u^k_{i,j},\ u^{k+1}_{i,j},\ u^*_{i,j}$ in Vektoren $U^k,\ U^{k+1},\ U^*$, indem Sie die Gitterpunkte geeignet numerieren. Wir schreiben nun die Gleichung (1) und (2) in der Form

$$\frac{U^* - U^k}{\Delta t/2} = A_x U^* + A_y U^k \tag{1*}$$

$$\frac{U^{k+1} - U^*}{\Delta t/2} = A_x U^* + A_y U^{k+1} \; . \tag{2*}$$

Bestimmen Sie die Matrizen A_x und A_y.

(b) Wir schreiben (1^*) und (2^*) um in

$$(I - \frac{\Delta t}{2} A_x) U^* = (I + \frac{\Delta t}{2} A_y) U^k$$
$$(I - \frac{\Delta t}{2} A_y) U^{k+1} = (I + \frac{\Delta t}{2} A_x) U^* \; .$$

Unter welchen Bedingungen sind die Matrizen

$$I - \frac{\Delta t}{2} A_x \quad \text{und} \quad I - \frac{\Delta t}{2} A_y$$

L-Matrizen?

Hinweis:

- Geben Sie die Matrizen in a) als Blockmatrizen an.
- Eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j}$ ist eine L-Matrix, falls gilt:

$$a_{i,j} \leq 0 \text{ für } i \neq j \text{ und } a_{i,i} > 0$$

2,5+2,5