Klausur Mathematische Grundlagen IV (CES)

28.07.2014

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_x(x,y) + 2yu_y(x,y) &= y, \quad x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R} \\ u(0,y) &= y, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

  i) Formulieren Sie dazu zunächst die Differentialgleichung, die die Lösung entlang der Charakteristiken erfüllt.

  ii) Lösen Sie anschließend diese Differentialgleichung.

c) Überprüfen Sie, ob die in b) bestimmte Lösung die Gleichung erfüllt.

1,5+2+1 Punkte

Aufgabe 2.

Die Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + au_x(x,t) &= 0, \qquad (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,t) &= 0, \qquad x \text{ auf } \partial\Omega \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in (0,1) \end{aligned}$$

mit konstantem $a \in \mathbb{R}$ soll mit der Diskretisierung

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

mit Zeitschrittweite Δt und konstanter Ortsschrittweite Δx approximiert werden.

a) Geben Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens in t und x an. (ohne Begründung)

b) Zeigen Sie, dass das Verfahren für $0 \leqslant a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$ Lax-Richtmyer-stabil ist. Ist das Verfahren für diesen Wertebereich konvergent?

0,5+2 Punkte

Aufgabe 3.

Sei $\Omega = (0,1)$. Die Gleichung

$$\begin{aligned} u_x(x) - u_{xxx}(x) &= f(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

soll auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterweite $h = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ diskretisiert werden. Außerhalb des Gebiets Ω wird die Funktion mit Null fortgesetzt, d.h. $u(x) = 0, x \notin \Omega$.

a) Zeigen sie, dass die dritte Ableitung durch

$$u_{xxx}(x) \approx \frac{u(x+3h) - 3u(x+2h) + 3u(x+h) - u(x)}{h^3}$$

approximiert werden kann, indem Sie die Formel mittels Taylorentwicklung herleiten. Was ist die Konsistenzordnung dieser Formel?

b) Diskretisieren Sie die Gleichung mittels

$$u_x(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

und der Formel aus a) und stellen Sie das resultierende Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ auf.

c) Ist die Systemmatrix A diagonaldominant?

2+2+1 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mit Lösung $x = (-\frac{13}{56}, -\frac{13}{16}, -\frac{29}{56})^T$.

a) Konvergieren das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^3$?

b) Führen Sie einen Schritt mit dem Jacobi-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (1, 0, 0)^T$.

c) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen zur Anwendung des CG-Verfahrens gegeben sind und führen Sie einen Schritt mit dem CG-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (0, -1, -1)^T$.

d) Welches Ergebnis erhält man nach drei Schritten mit dem CG-Verfahren?

1+1+2+1 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei das homogene Wärmeleitungsproblem

$$\begin{aligned} u_t &= \mu u_{xx}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mit der Anfangstemperatur $u_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und einer Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$.

a) Wenden Sie die Fourier-Transformation auf das Problem an und zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung durch

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x - \mu\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) d\xi$$

gegeben ist.

b) Formen Sie die Darstellung für $u(x,t)$ weiter um, so dass sich

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\beta) F(x-\beta, t) d\beta$$

mit

$$F(z,t) \equiv \int_0^\infty e^{-\mu\xi^2 t} \cos(\xi z) d\xi \tag{1}$$

ergibt.

c) Der Ausdruck (1) erfüllt die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial z} F(z,t) = -\frac{z}{2\mu t} F(z,t)$ für jedes $t > 0$ (braucht nicht gezeigt werden). Finden Sie eine Lösung dieser Gleichung, die ohne Integral geschrieben werden kann. Zeigen Sie damit, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-\beta)^2/(4\mu t)} u_0(\beta) d\beta.$$

Hinweis: Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2}.$$

1+2+2 Punkte

Aufgabe 6.

Sei L der lineare Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten in 1D, d.h.

$$L := \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0, \quad a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Fundamentallösung $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ von L durch ein Produkt

$$u(x) = H(x)w(x)$$

gegeben ist. Dabei ist H die Heaviside-Funktion, $w \in C^n(\mathbb{R})$ erfüllt die homogene Differentialgleichung $Lw = 0$ und

$$\begin{aligned} w(0) = w'(0) = \ldots = w^{(n-1)}(0) = 0, \\ w^{(n)}(0) = 1. \end{aligned}$$

3 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 6x^2 + 2x, \quad x \in (-1,1), \\ u(-1) &= 0, \\ u(1) &= 0, \end{aligned}$$

und der Finite-Elemente-Raum, der durch die Basisfunktionen

$$\phi_1(x) = 1 - x^2, \quad \phi_2(x) = x(1-x^2)$$

aufgespannt wird.

a) Diskretisieren Sie die Gleichung in diesem Raum. Wie lautet das dazugehörige Gleichungssystem?

b) Wie lautet die Lösung dieses linearen Gleichungssystems und die dazugehörige Finite-Elemente-Funktion?

3+0,5 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei das Problem

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x,t) &= \partial_{xx}u(x,t) + a, \qquad && x \in (0,1), t > 0 \\ u(0,t) &= 0, && t > 0 \\ u(1,t) &= 0, && t > 0 \\ u(x,0) &= x, && x \in (0,1) \\ u_t(x,0) &= 0, && x \in (0,1) \end{aligned}$$

mit einem konstantem Quellterm $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen von ∂_{xx}.

b) Entwickeln Sie den Quellterm und die Anfangsbedingung in diesen Eigenfunktionen.

c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

Hinweis: Die Gleichung $y''(x) = -cy(x) + b$ besitzt die allg. Lösung

$$y(x) = \frac{b}{c} + k_1 \sin(\sqrt{c}x) + k_2 \cos(\sqrt{c}x), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

1+2+3,5 Punkte