Klausur Mathematische Grundlagen IV (CES)

29.07.2013

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	4	2	0	2

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \ldots, 3$ erfüllt.

3 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 100u'(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mithilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie A_h und b_h.

(b) Unter welchen Bedingungen ist A_h eine M-Matrix?

(c) Wie müsste das Problem diskretisiert werden, um ohne Zusatzbedingungen die M-Matrix-Eigenschaft zu erhalten?

2+2+2 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems ist $x^* = (1,1)^T$.

a) Überprüfen Sie, ob das cg-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für alle Startvektoren $x^0 \in \mathbb{R}^2$ durchführbar ist und konvergiert.

b) Führen Sie einen Schritt des cg-Verfahrens mit dem Startvektor $x^0 = (1,0)^T$ durch.

c) Welches Ergebnis erhalten Sie nach dem zweiten Schritt?

2+2+1 Punkte

Aufgabe 4.

Das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \quad u(0) = 0 = u(1)$$

für ein $u \in C^6(]0,1[)$ und $f \in C^4(]a,b[)$ soll auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite h mithilfe eines kompakten Verfahrens der Form

$$\frac{1}{h^2}(\alpha u_{i+1} + \beta u_i + \alpha u_{i-1}) = \gamma f_{i+1} + \delta f_i + \gamma f_{i-1}$$

approximiert werden.
Wie müssen die Koeffizienten α, β, γ, δ gewählt werden, damit

- das Verfahren konsistent von Ordnung 4 ist, und
- die Matrix im entstehenden linearen Gleichungssystem eine M-Matrix ist?

Bergünden Sie, dass die mit diesem Verfahren berechnete Approximation für $h \to 0$ mit Ordnung 4 gegen die Lösung des Ursprungsproblems konvergiert.
Hinweis: Taylor-Entwicklung beider Seiten und Koeffizientenvergleich.

6 Punkte

Aufgabe 5.

a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u + a\,\partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + b\,\partial_x u + \partial_x v &= 0 \end{aligned}$$

ein hyperbolisches System ist für $ab > 0$.

b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem für $a = b = 1$ mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sin x \\ v_0(x) &= \cos x \end{aligned}$$

c) Welche Bedeutung haben die Eigenwerte der Jacobi-Matrix des hyperbolischen Systems in der Lösung?

1+2.5+0.5 Punkte

Aufgabe 6.

Wir wollen das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega = \left\{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\right\} \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= s \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

mit einer Funktion $s(\varphi)$ auf dem Rand lösen.

a) Verwenden Sie den Laplace-Operator in Polarkoordinaten

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad \text{für} \quad u(r,\varphi)$$

und benutzen Sie den Ansatz $u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ so, dass sich für $\Phi(\varphi)$ eine 2π-periodische Funktion ergibt. Geben Sie die Gleichungen für $R(r)$ und $\Phi(\varphi)$ an.

b) Benutzen Sie für die radiale Funktion R den Ansatz $R(r) = C\,r^\alpha$ und geben Sie die Lösung für $R(r)$ an.

c) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung des Randwertproblems die Form

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Big\{ c_n \sin(n\varphi) + d_n \cos(n\varphi) \Big\}$$

hat. Welche weitere sinnvolle Annahme für $R(r)$ ist dabei nötig?

d) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Randfunktion $s(\varphi) = \sin(2\varphi)$.

1.5+1+1.5+1 Punkte

Aufgabe 7.

Wir betrachten die PDE

$$\text{div}\,\mathbf{u} = f$$

für ein Vektorfeld $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ and $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

a) Sei $\phi \in D(\mathbb{R}^3)$ eine Testfunktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \text{div}\,(\mathbf{u})\,\phi d\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}\cdot\nabla\phi d\mathbf{x}.$$

b) und dass im Fall $d = 3$,

$$\mathbf{G}(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{||\mathbf{x}||^3}\mathbf{x}$$

eine Fundamentallösung der PDE ist. Betrachten Sie die Integrale in Kugelkoordinaten und nehmen Sie sphärische Symmetrie an.
Hinweis: Man beachte, dass mit Kugelkoordinaten bei sphärischer Symmetrie gilt: $\nabla\phi(r,\theta,\varphi) = \nabla\phi(r) = (\partial_r\phi, 0, 0)$. Außerdem beachte man, dass der Ortsvektor durch $\mathbf{x} = (r,0,0)$ und $\int d\mathbf{x} = \int 4\pi r^2 dr$ gegeben ist.

c) Geben Sie für $d = 3$ die allgemeine Lösung für die inhomogene PDE div $\mathbf{u} = f$ mit Hilfe der obigen Fundamentallösung G an .

d) Wie sieht die Fundamentallösung für $d = 1$ aus.

1+2+1+1 Punkte

Aufgabe 8.

a) Zeigen Sie, dass

$$\phi_{j,k}(x,y) = 2\sin(j\pi x)\cos(k\pi y) \quad j,k = 1,2,\cdots$$

die Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf $\Omega = [0,1]^2$ mit Nullrandbedingungen sind. Wie lauten die Eigenwerte?

b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y) = x\,(1-x)\,y\,(1-y)$$

in den Eigenfuntionen $\phi_{j,k}$.

c) Geben Sie die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u + f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \\ u &= 0 \quad \text{bei } t = 0 \end{aligned}$$

an.

Note: There was a mistake in the formulation of the question. The exact eigenfunctions are

$$\phi_{j,k}(x,y) = 2\sin(j\pi x)\sin(k\pi y) \quad j,k = 1,2,\cdots$$

1+3+2 Punkte