Aufgabe 1. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = 2x - 1 - x^2, \quad \text{für } x \in (0,1),$$

mit den gemischten Randbedingungen

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Diskretisieren Sie das Randwertproblem unter Verwendung der Finiten Differenzen Methode mit

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}, \quad y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

und Schrittweite $h = \frac{1}{N}$. Approximieren Sie die Ableitung am linken Rand mithilfe eines zusätzlichen (fiktiven) Punktes, den Sie hinterher wieder entfernen.

(a) Geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem ($A_h y_h = b_h$) an.

(b) Die exakte Lösung für dieses Problem lautet $y(x) = 1 - x^2$. Was lässt sich über die punktweise Differenz zwischen der Approximation y_h und der exakten Lösung y sagen?

3 + 1 Punkte

Aufgabe 2. Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$
$f(x_k)$	2	2	0	-1

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \ldots, 3$.

4 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-\frac{1}{3}x^3 u''(x) - x^2 u'(x) = f(x) \qquad x \in (0,1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

a) Überführen Sie diese Differentialgleichung unter Verwendung von Testfunktionen $v \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $v(0) = v(1) = 0$ in eine schwache Form. Stellen Sie sicher, dass danach nur erste Ableitungen von u vorkommen.

b) Für das Finite Elemente Galerkin Verfahren des obigen Randwertproblems mit $f(x) = x$ sei $h = \frac{1}{N+1}$, $x_n = nh$ für $n = 1, \ldots, N$. Dabei seien die Testfunktionen gerade die folgenden "Hut"-Funktionen:

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} 0 & x < x_{n-1} \\ \frac{1}{h}(x - x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 - \frac{1}{h}(x - x_n) & x_n \leq x < x_{n+1} \\ 0 & x_{n+1} \leq x \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots, N\,.$$

Ferner sei der Ansatz für die Lösung: $\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \tilde{v}_n(x)$.
Berechnen Sie das Gleichungssystem für das Finite Elemente Galerkin Verfahren. Drücken Sie alle Koeffizienten des linearen Gleichungssystems als eine Funktion aus, die nur von der Schrittweite h und der Zeilennummer n abhängt.

1,5 + 3,5 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie zwei Schritte des konjugierten Gradientenverfahrens (CG) zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit rechter Seit $b = (2, 1, 0)^T$ und dem Startvektor $x_0 = (0, 0, 0)^T$ durch (das heißt: berechnen Sie x_2).

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten des Jacobi-Verfahrens und des SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter $\omega = 1.2$ für die Matrix B.

3 + 3 Punkte

Aufgabe 5. (a) Zeigen Sie, dass

$$\partial_t u + \partial_x u + \rho \partial_x v = 0$$
$$\partial_t v + \partial_x u - 2\partial_x v = 0$$

ein hyperbolisches System ist für alle $\rho > -\frac{9}{4}$.

(b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem für $\rho = 0$ mit den Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = sin(x)$$
$$v_0(x) = cos(x)$$

(c) Welche Bedeutung haben die Eigenwerte der Jacobi-Matrix des hyperbolischen Systems in der Lösung?

1.5+2.5+0.5 Punkte

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 && 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\\
u(0,y) &= 0, && 0 < y < 1,\\
u(x,0) &= 0, && 0 < x < 1,\\
u(1,y) &= 0, && 0 < y < 1,\\
u(x,1) &= \sin(\pi x), && 0 < x < 1
\end{aligned}$$

mit dem Ansatz der Separation der Variablen. 4.5 Punkte

Aufgabe 7. (a) Zeigen Sie, dass

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

eine Fundamentallösung für den Operator

$$\frac{d}{dt} u + u$$

ist.

(b) Benutzen Sie diese Fundamentallösung um die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} u(t) + u(t) = f(t)$$

mit $f(t) = \sin(t)$ zu bestimmen.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben ist das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_{xx} u(x,t) + a, && x \in (0,1), t > 0 \\ u(0,t) &= 0, && t > 0 \\ u(1,t) &= 0, && t > 0 \\ u(x,0) &= \sin(\pi x), && x \in (0,1) \end{aligned}$$

mit einem konstantem Quellterm $a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen.

(b) Entwickeln Sie den Quellterm in Eigenfunktionen.

(c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

1+1+4 Punkte