Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Cauchy-Problems für die eindimensionale Wellengleichung

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0, && \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R} \\
u(0,x) &= xe^x && \text{für } x \in \mathbb{R} \\
u_t(0,x) &= -x^2 && \text{für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

4 Punkte

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der folgenden Distributionen. Dabei ist $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(a) $T_f\phi := (f, \phi)$ wobei $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 + x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$.

(b) $T_g\phi := -\phi(-1) + 2\phi(0) - \phi(1)$.

2+2 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned}-\Delta u(x,y) &= \lambda u\\ u(x,0) &= 0\\ u(x,1) &= 0\\ u(0,y) &= \sin(2\pi y)\\ u(1,y) &= \sin(2\pi y).\end{aligned}$$

für u in $\Omega = (0,1) \times (0,1)$.

(a) Lösen Sie das Randwertproblem für $\lambda = 0$.

(b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ für die das Randwertproblem eine Lösung hat.

2+2 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x) - u(t,x), \qquad && t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= e^{-\frac{x^2}{2}}, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(a) Es sei

$$\hat{u}(t,\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(t,x) e^{-ix\xi}\, dx$$

die Fouriertransformierte von u bzgl. x. Rechnen Sie nach, dass

$$\hat{u}_t = -\xi^2 \hat{u} - \hat{u}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems.

2+2 Punkte

Aufgabe 5. Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	3	2	3	4

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \ldots, 3$.

4 Punkte

Aufgabe 6. Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + \psi u(x) &= x^2, \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Diskretisieren Sie den Definitionsbereich durch N Punkte

$$x_n = nh\,, \qquad h = \frac{1}{N+1}\,, \qquad n = 1, ..., N\,,$$

unter Verwendung der Finiten Differenzen Methode

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}\,.$$

(a) Geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem ($A_h u_h = b_h$) an.

(b) Für welche Werte ψ existiert zum diskreten Problem mit beliebiger Auflösung genau eine Lösung.

Hinweis: Die Eigenwerte der $N \times N$ Tridiagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{lauten } \lambda_n = 2\cos\left(\tfrac{n\pi}{N+1}\right), \qquad \text{n=1,...,N.}$$

2 + 2 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung $x = (1, 2, 4)^T$.

a) Führen Sie jeweils einen Schritt des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x^0 = (1, 1, 1)^T$ durch.

b) Gegeben sei die Richardson Methode

$$x^{k+1} = x^k + \omega(b - Ax^k).$$

Für welche Werte ω konvergiert die Methode?
Wie lautet der optimale Wert für ω?

2 + 2 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-(a(x)u')' + q(x)u(x) = f(x) \qquad x \in (0,1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

a) Überführen Sie diese Differentialgleichung unter Verwendung von Testfunktionen $v \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $v(0) = v(1) = 0$ in eine schwache Form. Stellen Sie sicher, dass danach nur erste Ableitungen von u vorkommen.

b) Gegeben sei $a(x) = x^2$, $q(x) = 2$ und $f(x) = x$. Unterteilen Sie für das Finite Elemente Galerkin Verfahren den Definitionsbereich in $N+1$ gleichgroße Elemente, so dass $x_n = nh$ und $h = \frac{1}{N}$. Dabei seien die Testfunktionen gerade die folgenden "Hut"-Funktionen:

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} 0 & x < x_{n-1} \\ \frac{1}{h}(x - x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 - \frac{1}{h}(x - x_n) & x_n \leq x < x_{n+1} \\ 0 & x_{n+1} \leq x \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots, N\,.$$

Ferner sei der Ansatz für die Lösung: $\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \tilde{v}_n(x)$.
Wie lautet die Gleichung, die man durch Testen mit der n-ten Hut-Funktion für den obigen Ansatz mit dem Finite Elemente Galerkin Verfahren für $\tilde{u}$ erhält?

c) Wie sieht das resultierende lineare Gleichungssystem ($Ax = b$) für das Finite Elemente Galerkin Verfahren aus? Drücken Sie alle Koeffizienten des linearen Gleichungssystems als eine Funktion aus, die nur von der Schrittweite h und der Zeilennummer n abhängt.

2+1+1 Punkte