Aufgabe 1. Gegeben sei die Transportgleichung

$$-yu_x(x,y) + xu_y(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$
$$u(0,y) = \cos(y^2), \qquad y \in \mathbb{R}_0^-$$

(a) Ermitteln Sie mithilfe der Charakteristikenmethode einen Kandidaten u für die Lösung dieser Transportgleichung.

(b) Verifizieren Sie, dass Ihr Kandidat u aus Teil (a) die Transportgleichung erfüllt.

3.5 + 0.5 Punkte

Aufgabe 2. Lösen Sie das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 && \text{in } \Omega = (0,a)\times(0,b),\\
\partial_x u(0,y) = \partial_x u(a,y) &= 0, && y \in [0,b],\\
u(x,0) &= \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right), && x \in [0,a],\\
u(x,b) &= \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right), && x \in [0,a].
\end{aligned}
$$

4 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei das Anfangswertproblem der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\text{(AWP)} \qquad \begin{aligned} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) &= f(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= 0, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: Die Fouriertransformation bzgl. x von $f(x) = e^{-x^2}$ lautet $\mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\pi} e^{\frac{-\xi^2}{4}}$.

HINWEIS: Sie dürfen $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ verwenden.

(b) Beweisen Sie, dass die Fouriertransformierte bzgl. x von $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}$, für $t > s$, durch $\mathcal{F}(g)(\xi) = \sqrt{4\pi(t-s)} e^{(s-t)\xi^2}$ gegeben ist.

(c) Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}(u(t,x))(\xi)$ her, indem Sie die Fouriertransformation bzgl. x auf (AWP) und die Randbedingung anwenden. Lösen Sie diese Differentialgleichung für $\hat{u}(t,\xi)$.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung des ursprünglichen Problems (AWP) wie folgt lautet:

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} f(s,y) dy ds$$

1 + 0.5 + 2 + 0.5 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben sei die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) &= f(t,x), && t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= g(x), && x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x) &= h(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass sich die Lösung u als $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$ schreiben lässt, wobei $u_1(t,x)$ die homogene Wellengleichung mit den angegebenen Anfangsbedingungen löst und $u_2(t,x)$ die Lösung der angegebenen inhomogenen Wellengleichung mit den Anfangsbedingungen $u_2(0,x) = \partial_t u_2(0,x) = 0$ ist.

(b) Berechnen Sie u_1 und u_2 für

$$g(x) = 1 + \cos(x), \quad h(x) = -1, \quad \text{und} \quad f(t,x) = e^{-t},$$

und bestimmen Sie $u(t,x)$.

1.5 + 2 Punkte

Aufgabe 5. Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	2	0	2	0

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_4(f;x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \dots, 3$.

3 Punkte

Aufgabe 6. Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + u'(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Man kann sogar annehmen, dass $u \in C^4(0,1)$.

Dieses Problem soll mithilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite h und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden.

(a) Diskretisieren Sie das Problem so, dass A_h eine M-Matrix ist und weisen Sie diese Eigenschaft nach. Geben Sie auch den Vektor b_h an.

(b) Begründen Sie, dass das in (a) konstruierte Verfahren für $h \to 0$ gegen die analytische Lösung des Konvektions–Diffusionsproblems konvergiert.

3.5 + 1.5 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung $x = (-\frac{11}{21}, -\frac{33}{21}, -\frac{25}{21})^T$.

a) Überprüfen Sie, ob das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für alle Startvektoren $x^0 \in \mathbb{R}^3$ konvergiert.

b) Führen Sie jeweils einen Schritt des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x^0 = (1, 0, 0)^T$ durch.

c) Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn sie ausgehend von $x^0 = (1, 0, 0)^T$ drei Schritte des cg-Verfahrens durchführen (Begründung)?

1 + 2 + 1 Punkte

Aufgabe 8. Zur Approximation der Lösung des parabolischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0, && \text{für } (t,x) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(0,x) &= g(x), && \text{für } x \in (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0, && \text{für } t \in (0,1) \end{aligned}$$

wird die Diskretisierung

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + \frac{-u_{i+1}^k + 2u_i^k - u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} = 0$$

vorgeschlagen, mit $\Delta x = \frac{1}{n}$, $\Delta t = \frac{1}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Dabei bezeichnet

$$u_i^k = u(t_k, x_i), \qquad \text{mit } (t_k, x_i) = (k\,\Delta t, i\,\Delta x), \qquad k = 0, \ldots, m; \quad i = 0, \ldots, n$$

die Approximation auf dem äquidistanten Gitter.

a) Ordnen Sie die Unbekannten in der Reihenfolge

$$\mathbf{u} = \left(u_1^1, u_2^1, \ldots, u_{n-1}^1, u_1^2, \ldots, u_{n-1}^2, u_1^3, \ldots\ldots u_{n-1}^m\right)^T$$

zu einem Vektor $\mathbf{u}$ an, und leiten Sie ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{u}$ her.

b) Ist die Matrix A für alle Schrittweiten Δt und Δx eine M-Matrix? Begründen Sie Ihre Antwort. (Diese Frage lässt sich auch unabhängig von Teil a) beantworten).

2.5 + 1 Punkte