Aufgabe 1. Gegeben sei die Transportgleichung

$$\begin{cases} \langle \nabla u(x,y), (-y,x) \rangle = x, & (x,y) \in \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}, \\ u(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}, & (x,y) \in M := \{ (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi > 0, \eta = 0 \}. \end{cases}$$

a) Geben Sie die charakteristischen Grundkurven für diese Transportgleichung an.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode einen Kandidaten u für die Lösung dieser Transportgleichung.

c) Verifizieren Sie, dass Ihr Kandidat u aus Teil b) die Transportgleichung erfüllt.

$1.5 + 1.5 + 1.5$ Punkte

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\hat{f}$ die Fourier-Transformierte von f. Zeigen Sie:

a) Ist $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so ist die durch

$$F(x,\, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(x+iy)\xi} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2$$

definierte Funktion $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert und beliebig oft differenzierbar mit

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k} F(x,\, y) = i^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(x,\, y), \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad k \geq 1$$

b) Ist $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so ist die in Teil a) definierte Funktion F harmonisch in $\mathbb{R}^2$.

($*$) c) Sind $f,\, \hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so ist $f \equiv 0$.

Hinweise: Verifizieren Sie die Behauptungen aus Teil a) zunächst auf *Streifen* der Form

$$\Omega_S = \left\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y| < S \right\}.$$

Der Teil c) ist eine Bonusaufgabe.

$2.5 + 1 + 3$ Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei die Potentialgleichung

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= e^{-\|x\|^2}, \qquad x \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n, \\ u(x) &= g(x), \qquad x \in \partial B_1(0). \end{cases}$$

Weiterhin seien $u \in C(\overline{B_1(0)}) \cap C^2(B_1(0))$ eine Lösung dieser Gleichung für

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle\, e_n + x,\, x\,\rangle, \qquad x \in \partial B_1(0)$$

und $v \in C(\overline{B_1(0)}) \cap C^2(B_1(0))$ eine Lösung dieser Gleichung für

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle\, e_n - x,\, x\,\rangle, \qquad x \in \partial B_1(0),$$

wobei e_n jeweils den n-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Berechnen Sie $(u - v)(0)$.

2 Punkte

Aufgabe 4. Bestimmen Sie eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in (-\pi, \pi), \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi), & t > 0, \\ u(0,x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cos(jx), & x \in [-\pi, \pi], \\ \partial_t u(0,x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \cos(jx), & x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

4 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_A'(t) &= -\alpha y_A(t) + \beta y_B(t), \quad t > 0, \\ y_B'(t) &= \alpha y_A(t) - \beta y_B(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

das z.B. als einfaches Modell für den Konzentrationsverlauf chemisch reagierender Spezies A und B dienen kann.

a) Zeigen Sie, dass

$$I : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad I(t) = y_A(t) + y_B(t)$$

eine Invariante für das Differentialgleichungssystem ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass das explizite, das implizite und das verbesserte Euler-Verfahren diese Invariante jeweils erhalten oder nicht.

1 + 3 Punkte

Aufgabe 6. Gegeben sei das Hamilton'sche System

$$\begin{pmatrix} p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q}(p(t),\, q(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial p}(p(t),\, q(t)) \end{pmatrix}$$

mit

$$H(p,\, q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2, \qquad p,\, q \in \mathbb{R}$$

und $k,\, m > 0$.

a) Zeigen Sie, dass für die Approximation der Lösung dieses Systems stets

$$H(p^{j+1},\, q^{j+1}) < H(p^j,\, q^j)$$

ist, falls $(p^{j+1},\, q^{j+1})$ mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens aus $(p^j,\, q^j)$ ermittelt wird und $(p^j,\, q^j) \neq (0,\, 0)$ ist.

b) Geben Sie ein Einschritt-Verfahren an, bei dessen Verwendung zur Approximation der Lösung dieses Systems stets

$$H(p^{j+1},\, q^{j+1}) = H(p^j,\, q^j)$$

ist, und bestätigen Sie diese Gleichung für das von Ihnen angegebene Verfahren durch Nachrechnen.

Hinweis: Wird $(p^{j+1},\, q^{j+1})$ durch einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h > 0$ aus $(p^j,\, q^j)$ ermittelt, so gilt

$$H(p^{j+1},\, q^{j+1}) = \left(1 + h^2\frac{k}{m}\right) H(p^j,\, q^j).$$

2.5 + 2.5 Punkte

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass sowohl die Konsistenz- als auch die Konvergenzordnung des linearen 2-Schritt-Verfahrens, das durch die Vorschrift

$$y^{j+2} = y^j + \frac{h}{3}\big(f(t_j, y^j) + 4f(t_{j+1}, y^{j+1}) + \alpha f(t_{j+2}, y^{j+2})\big)$$

gegeben ist, mindestens 3 ist.

Hinweis: Ist das Verfahren nullstabil?

4 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Nutzen Sie die Struktur von A und die sich für A ergebenden Gershgorin-Kreise, um Abschätzungen für die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte von A herzuleiten.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

c) Geben Sie den Algorithmus der einfachen Vektoriteration (d.h. ohne Normierung in jedem Schritt) zur Approximation des betragsmäßig größten Eigenwertes λ_1 von A durch eine Folge $(\lambda^{(k)})_{k\geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ an und nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus Teil b) um die Konvergenzgeschwindigkeit der so konstruierten Folge gegen λ_1 abzuschätzen.

Hinweis: Einer der Eigenwerte von A ist 3.

1 + 1 + 1 Punkte